Ю. Г. Прохоров[1]

Компактные комплексные поверхности

(лекции читанные в ИТЭФ в мае – июне 2002 г.)

[1]Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет, кафедра высшей алгебры;
http://mech.math.msu.su/department/algebra/staff/prokhorov/
e-mail: prokhoro@mech.math.msu.su

0. Вводная лекция

25 апреля 2002

Определение

Комплексным n-мерным многообразием называется отделимое (т.е. хаусдорфово) топологическое пространство X, для которого существует открытое покрытие $\cup U_\alpha = X$ и гомеоморфизм $\varphi_\alpha \colon U_\alpha \to \Delta_\alpha$ на открытую область $\Delta_\alpha \subset \mathbb{C}^n$ такие, что *функции перехода* $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ голоморфны в своих областях определения.

Одномерное комплексное многообразие называется *римановой поверхностью*. Двумерное комплексное многообразие называется *комплексной поверхностью*. Нас будет интересовать случай *связных компактных* комплексных поверхностей.

Примеры

По теореме о неявной функции поверхность, заданная однородным многочленом $f(x_0, \ldots, x_4)$ в проективном пространстве $\mathbb{P}^3$ является (компактной) комплексной поверхностью. Аналогично, подмножество $X \subset \mathbb{P}^n$, заданное однородными многочленами $f_i(x_0, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n-2$ такими, что

$$\operatorname{rk}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i=1,\ldots,n-2,\ j=0,\ldots,n} = n-2.$$

является комплексной поверхностью (полным пересечением).

Компактное комплексное многообразие X, допускающее голоморфное вложение $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ в проективное пространство называется *проективным алгебраическим многообразием.*

Теорема 0.1 (Чжоу). *Каждое проективное алгебраическое многообразие $X \subset \mathbb{P}^n$ является множеством нулей некоторых однородных многочленов $f_i(x_0, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, m$ (здесь m можно взять конечным, $m \geq n - \dim X$, но необязательно $m = n - \dim X$).*

Более того, $X \subset \mathbb{P}^n$ – неособое подмногообразие, т.е.

$$\operatorname{rk}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i=1,\ldots,m,\ j=0,\ldots,n} = n - \dim X.$$

Любая риманова поверхность допускает голоморфное вложение в проективное пространство, т.е. является *алгебраической кривой.* Это уже неверно в случае комплексных поверхностей.

Произведения

Пусть C_1, C_2 – алгебраические кривые. Их произведение $C_1 \times C_2$ обладает естественной структурой комплексной поверхности. Эта поверхность проективна. Действительно, пусть $C_1 \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ и $C_2 \hookrightarrow \mathbb{P}^m$ – голоморфные вложения. Рассмотрим вложение Сегре

$$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \hookrightarrow \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1},$$

$$(x_0 : \cdots : x_n) \times (y_0 : \cdots : y_m) \to (x_0y_0 : x_0y_1 : \cdots : x_ny_m).$$

Тогда композиция $C_1 \times C_2 \hookrightarrow \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \hookrightarrow \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$ является голоморфным вложением.

Факторы по дискретным группам

Будем говорить, что группа G действует на X *свободно* и *дискретно*, если выполняются следующие условия:

(i) любая точка $x \in X$ имеет окрестность U_x такую, что $gU_x \cap U_x = \varnothing$ для всех $g \in G$, $g \neq 1$;

(ii) для любых двух точек $x, y \in X$ из разных G-орбит существуют окрестности $U_x \ni x$ и $U_y \ni y$ такие, что $gU_x \cap U_y = \varnothing$ для всех $g \in G$.

Тогда факторпространство X/G является комплексным многообразием.

Пример 0.2. Пусть $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$ – полная решетка, т.е. $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^{2n}$. Тогда $T := \mathbb{C}^n/\Lambda$ – компактное комплексное многообразие. Оно называется *комплексным тором.* Многообразие T также имеет групповую структуру, которая согласована со структурой многообразия: отображения $T \times T \to T$ и $T \to T$ взятия суммы и обратного элемента голоморфны, т.е., T является компактной (связной) комплексной группой Ли.

Одномерные комплексные торы – это эллиптические кривые. Комплексный тор, допускающий голоморфное вложение в проективное пространство называется *абелевым многообразием.*

Теорема 0.3. *Любая компактная связная комплексная группа Ли является комплексным тором.*

Вычислим топологические инварианты комплексного тора. Рассмотрим для простоты случай $n = 2$. Ясно, что такая поверхность $X = V/\Lambda$ диффеоморфна $\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}^4 \overset{\text{diff}}{\sim} S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1$. Отсюда по формулам Кюннета

$$
\begin{aligned}
b_1(X) = b_0(S^1)b_1(S^1 \times S^1 \times S^1) + b_1(S^1)b_0(S^1 \times S^1 \times S^1) = \\
b_1(S^1 \times S^1 \times S^1) + 1 = \cdots = b_1(S^1) + 3 = 4,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_2(X) = b_0(S^1)b_2(S^1 \times S^1 \times S^1) + b_1(S^1)b_1(S^1 \times S^1 \times S^1) + b_2(S^1)b_0(S^1 \times S^1 \times S^1) = \\
b_2(S^1 \times S^1 \times S^1) + 3 = b_2(S^1 \times S^1) + 2 + 3 = b_1(S^1)^2 + 2 + 3 = 6.
\end{aligned}
$$

Более того, имеются канонические изоморфизмы

$$\pi_1(X) \simeq H_1(X, \mathbb{Z}) \simeq \Lambda.$$

Отсюда

$$H^1(X, \mathbb{Z}) \simeq \operatorname{Hom}(\pi_1(X), \mathbb{Z}) \simeq \Lambda^\vee, \qquad H^r(X, \mathbb{Z}) \simeq \wedge^r(\Lambda^\vee).$$

Пример 0.4. Пусть $W = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ и пусть $\lambda \in (0, 1)$. Рассмотрим действие $G = \mathbb{Z}$ на W следующим образом:

$$(z_1, z_2) \longrightarrow (\lambda^m z_1, \lambda^m z_2), \qquad m \in \mathbb{Z}.$$

Факторповерхность $X := W/G$ называется *поверхностью Хопфа.* Несложно показать, что X гомеоморфна $S^1 \times S^3$.

Факторы по конечным группам

Пусть G – конечная группа голоморфно действующая на W. Очевидно, что факторпространство W/G отделимо. Предположим, что в окрестности каждой точки $P \in W$ существует локальная система координат $w_1, \ldots, w_n$ такая, что

(i) действие G в этих координатах линейно;

(ii) кольцо инвариантов изоморфно кольцу многочленов: $\mathbb{C}[w_1, \ldots, w_n]^G \simeq \mathbb{C}[v_1, \ldots, v_n]$.

Тогда $v_1, \dots, v_n$ являются локальными координатами в окрестности точки $\pi(P)$. Поэтому W/G является комплексным многообразием.

Пример 0.5 (Симметрический квадрат кривой). Пусть C – кривая, $W = C \times C$ и $G = \mathbb{Z}_2$ действует на W перестановками сомножителей. Факторповерхность W/G называется *симметрическим квадратом* C.

Поле мероморфных функций

Через $\mathcal{M}(X)$ обозначается поле (глобальных) мероморфных функций на многообразии X. Если многообразие X проективно, то любая глобальная мероморфная функция на X является рациональной, т.е. является ограничением рациональной функции с $\mathbb{P}^n$. Поэтому $\operatorname{tr}\deg \mathcal{M}(X) = \dim X$ в этом случае.

Теорема 0.6. *Поле* $\mathcal{M}(X)$ *конечно порождено и* $\operatorname{tr}\deg \mathcal{M}(X) \leq \dim X$

Число $a(X) := \operatorname{tr}\deg \mathcal{M}(X)$ называется *алгебраической размерностью* X.

Топология Зарисского

На каждом компактном комплексном многообразии, помимо классической топологии, можно ввести так называемую *топологию Зарисского*: замкнутыми подмножествами в этой топологии являются аналитические подмножества. Например, на алгебраической кривой замкнутыми подмножествами в топологии Зарисского являются конечные множества точек. Отметим, что эта топология нехаусдовфова.

Рациональные отображения

Рациональным или *мероморфным* отображением комплексного многообразия X в проективное пространство $\mathbb{P}^m$ называется отображение

$$\psi\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^m, \quad (z_1, \dots, z_n) \to (f_0(z_1, \dots, z_n), \dots, f_m(z_1, \dots, z_n)),$$

где $z_1, \dots, z_n$ – локальные координаты, а f_i – глобальные мероморфные функции. Рациональное отображение не является всюду определенным. Оно определено на открытом по Зарисскому множеству, дополнению к *множеству неопределенности.*

Пример 0.7. Отображение $\mathbb{C}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$, $(x, y) \to (x : y)$ является рациональным, но не голоморфным отображением. Его множество неопределенности – начало координат.

Теорема 0.8. *Множество неопределенности рационального отображения имеет коразмерность* ≥ 2.

Доказательство. Домножая на знаменатели, мы можем добиться того, что f_i – голоморфные функции. Более того, мы можем считать, что они в совокупности взаимно просты. Множество неопределенности задается тогда уравнениями $f_0 = \dots = f_m = 0$ и имеет коразмерность ≥ 2. □

Следствие 0.9. *Любое рациональное отображение алгебраической кривой* $C \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ *является голоморфным.*

Голоморфное отображение компактных комплексных многообразий $\psi\colon X \to Y$ называется *бирациональным (или бимероморфным) морфизмом*, если существуют замкнутые в топологии Зарисского подмножества $V_X \subset X$ и $V_Y \subset V_Y$ такие, что $\psi_{X \setminus V_X}\colon X \setminus V_X \to Y \setminus V_Y$ является биголоморфным изоморфизмом. Говорят, что компактные комплексные многообразия X и Y *бирационально (или бимероморфно) изоморфны (или эквивалентны)*, если существуют компактное комплексное многообразие W и бирациональные морфизмы $\psi\colon W \to X$ и $\phi\colon W \to Y$. В этом случае существуют замкнутые в топологии Зарисского подмножества $V_X \subset X$ и $V_Y \subset V_Y$ такие, что $\phi \circ \psi^{-1}_{X\setminus V_X} : X \setminus V_X \to Y \setminus V_Y$ является биголоморфным изоморфизмом.

Бирационально изоморфные алгебраические кривые (биголоморфно) изоморфны. Это уже не верно в случае поверхностей.

У бимероморфно эквивалентных многообразий X и Y поля мероморфных функций $\mathcal{M}(X)$ и $\mathcal{M}(Y)$ изоморфны. Для проективных алгебраических многообразий верно и обратное. В общем случае обратное неверно: поля мероморфных функций могут быть тривиальны.

Пример 0.10. Пусть $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ и $Y = \mathbb{P}^2$. Эти поверхности бирационально изоморфны:

$$X \setminus (\mathrm{pt} \times \mathbb{P}^1) \setminus (\mathbb{P}^1 \times \mathrm{pt}) \simeq \mathbb{P}^2 \setminus (\text{прямая}).$$

Однако поверхности неизоморфны (они даже не гомеоморфны) так как $\chi_{\mathrm{top}}(X) = 3$, а $\chi_{\mathrm{top}}(Y) = 4$.

Бирациональное отображение может быть описано также следующим образом. Рассмотрим вложение Сегре

$$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^3, \quad (u_0, u_1) \times (v_0, v_1) \to (u_0v_0, u_0v_1, u_1v_0, u_1v_1).$$

Его образом является квадрика $x_0x_3 = x_1x_2$. Стереографическая проекция

$$\chi \colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^2, \quad (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \dashrightarrow (x_1 : x_2 : x_3)$$

из точки $P = (1 : 0 : 0 : 0)$ на плоскость $\{x_0 = 0\}$ является бирациональным отображением. Отображение χ не определено в P. Обратное отображение не определено в двух точках – образах прямых $\{x_3 = x_1 = 0\}$ и $\{x_3 = x_2 = 0\}$, лежащих на квадрике.

Говорят, что число или другой объект является бирациональным инвариантом, если он не меняется при бирациональных (бимероморфных) преобразованиях. Как уже говорилось, одним из основных бирациональных инвариантов поверхности X является ее поле мероморфных функций $\mathcal{M}(X)$. В частности, ее степень трансцендентности $\operatorname{tr}\deg \mathcal{M}(X)$, которая называется *алгебраической размерностью* X и обозначается $a(X)$. Для поверхности этот инвариант может принимать значения $a(X) = 0, 1, 2$.

Другим примером бирационального инварианта является фундаментальная группа. Действительно, для любого бимероморфного отображения $\psi \colon X \dashrightarrow Y$ существует замкнутое подмножество $V \subset X$ коразмерности 2 такое, что $\psi|_{X\setminus V}$ – голоморфное отображение. Для любой петли γ мы находим гомотопную ей петлю γ', не пересекающую V. Легко видеть, что класс $\psi(\gamma')$ не зависит от выбора γ'. Таким образом, мы получаем отображение

$$\psi_* \colon \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(Y).$$

Аналогично получает обратное отображение

$$\psi_*^{-1} \colon \pi_1(Y) \longrightarrow \pi_1(X),$$

так что $\pi_1(X) \simeq \pi_1(Y)$.

По теореме Пуанкаре $H_1(X, \mathbb{Z}) \simeq \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)]$. Поэтому бирациональным инвариантом является также и первое число Бетти

$$b_1 := \operatorname{rk} H^1(X, \mathbb{Z}) = \dim H^1(X, \mathbb{R}).$$

Раздутие точки

Рассмотрим сначала простейший случай: $X = \mathbb{C}^2$ и P – начало координат. *Раздутием* X в P называется голоморфное отображение $\sigma \colon \tilde{X} \to X$ такое, что $\tilde{X}$ задается в $\mathbb{C}^2_{x,y} \times \mathbb{P}^1_{u,v}$ уравнением $xv = yu$, а σ – проекция. Легко проверить следующие факты:

(i) $E := \sigma^{-1}(P) \simeq \mathbb{P}^1$, это подмножество называется *исключительным дивизором*;

(ii) σ является изоморфизмом на $\tilde{X} \setminus E$.

Пусть теперь X – произвольное комплексная поверхность. Выберем окрестность U точки $P \in X$, изоморфную диску $\Delta \subset \mathbb{C}^2$. Мы можем определить раздутие диска $\tilde{\Delta} \to \Delta$. Заменим теперь в многообразии X открытое подмножество U на $\tilde{\Delta}$. Несложно проверить, что мы получим новую комплексную поверхность $\tilde{X}$ и проекцию $\tilde{X} \to X$. Назовем $\tilde{X} \to X$ раздутием X в точке P. Раздутие является типичным примером бирационального морфизма.

Для любой кривой L на X ее *собственным прообразом* называется замыкание $\sigma^{-1}(L \setminus P)$. Несложно поверить, что собственные прообразы трансверсально пересекающихся кривых на X не пересекаются на $\tilde{X}$

Отметим, что раздутие сохраняет проективность, т.е. раздутие проективной алгебраической поверхности снова является таковой. Это объясняет следующая конструкция. Как и выше, определим раздутие $\mathbb{C}^n$ в начале координат: $\tilde{\mathbb{C}}^n$ задается в $\mathbb{C}^n_{x_1,\dots,x_n} \times \mathbb{P}^{n-1}_{y_1,\dots,y_n}$ уравнениями $x_iy_j = x_jy_i$, $1 \le i, j \le n$. Следовательно, определено раздутие любого комплексного многообразия в точке. Несложно проверить, что эти конструкции согласованы: если $\sigma\colon \tilde{W} \to W$ раздутием в точке P и $X \subset W$ – комплексное подмногообразие, содержащее P, то его собственный прообраз $\tilde{X} \subset \tilde{W}$ является раздутием X в точке P. Теперь остается показать, что раздутие проективного пространства является проективным алгебраическим многообразием.

Опишем как меняются топологические инварианты при раздутии точки. Пусть $\sigma\colon \tilde{X} \to X$ – раздутие точки $P \in X$ и пусть $E := \sigma^{-1}(P)$ – исключительный дивизор. Рассмотрим достаточно малую окрестность U точки P и положим $\tilde{U} := \sigma^{-1}(U)$, а также $V := X \setminus \{P\}$ и $\tilde{V} := \tilde{X} \setminus E$. Имеем точные последовательности Майера-Вьеториса

$$\begin{array}{ccccccc}
H^1(U \cap V) & \longrightarrow & H^2(X) & \longrightarrow & H^2(U) \oplus H^2(V) & \longrightarrow & H^2(U \cap V) \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle \sigma^*} & & \downarrow & & \| \\
H^1(\tilde{U} \cap \tilde{V}) & \longrightarrow & H^2(\tilde{X}) & \longrightarrow & H^2(\tilde{U}) \oplus H^2(\tilde{V}) & \longrightarrow & H^2(\tilde{U} \cap \tilde{V})
\end{array}$$

Отображение $\sigma^*\colon H^2(X) \to H^2(\tilde{X})$ инъективно. Поэтому $H^2(\tilde{X}) \simeq H^2(X) \oplus H^2(E)$. Аналогично имеем $H^1(\tilde{X}) \simeq H^1(X)$.

1. Бирациональные преобразования, минимальные модели, дивизоры и линейные системы

20 мая 2002

Структура бирациональных отображений

Пусть $\psi\colon X \to Y$ – бимероморфный морфизм компактных комплексных поверхностей. Основная теорема Зарисского утверждает, что каждый слой $\psi^{-1}(P)$, $P \in Y$ связен. Следовательно, каждый нетривиальный слой имеет размерность 1. Кривые $\psi^{-1}(P)$ называются *исключительными кривыми* или *исключительными дивизорами.*

Теорема 1.1. *Любой бимероморфный морфизм компактных комплексных поверхностей $\psi\colon X \to Y$ раскладывается в композицию раздутий точек:*

$$\psi\colon X = Y_n \xrightarrow{\sigma_n} Y_{n-1} \cdots Y_1 \xrightarrow{\sigma_1} Y_0 = Y.$$

Следствие 1.2. *Любой бимероморфное отображение компактных комплексных поверхностей*

$$\psi\colon X \dashrightarrow Y$$

раскладывается в композицию раздутий точек и отображений обратных к ним:

$$\psi\colon X = Y_n \xrightarrow{\sigma_n} Y_{n-1} \cdots Y_{m-1} \xrightarrow{\sigma_{m-1}} Y_m \xleftarrow{\sigma_m} Y_{m+1} \cdots Y_1 \xleftarrow{\sigma_1} Y_0 = Y.$$

Пример 1.3. Рассмотрим, так называемое, *квадратичное преобразование Кремоны*

$$\psi\colon \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2, \qquad (x:y:z) \longrightarrow (yz:xz:xy).$$

Это отображение не определено в точках $(1:0:0)$, $(0:1:0)$ и $(0:0:1)$. Так как

$$\psi^2(x:y:z) = (x^2yz : xy^2z : xyz^2) = (x:y:z),$$

то это же верно и для обратного отображения. *Разрешением неопределенности* является раздутие трех точек на обоих экземплярах $\mathbb{P}^2$.

Поверхность X называется *минимальной*, если не существует бимероморфных морфизмов $X \to X'$ на компактную комплексную поверхность X'. Правильный подход к бирациональной классификации поверхностей состоит в классификации минимальных поверхностей.

Дивизоры

Пусть X – произвольное компактное комплексное многообразие. *Простым дивизором* называется неприводимая аналитическое подмножество $V \subset X$ коразмерности 1 (т.е. размерности $\dim X - 1$). Напомним, что аналитическое подмножество $V \subset X$ *неприводимо*, если его нельзя представить в виде нетривиального объединения двух аналитических подмножеств: $V \neq V_1 \cup V_2$, где $V_1, V_2 \neq V$. *Дивизором* называется целочисленная линейная комбинация простых дивизоров: $D = \sum d_i D_i$, $d_i \in \mathbb{Z}$. Таким образом, дивизоры – это элементы свободной абелевой группы $\mathrm{Div}(X)$, порожденной простыми дивизорами. Дивизор $D = \sum d_i D_i$ называется *эффективным* (это обозначается $D \geq 0$), если $d_i \geq 0$. Для каждой мероморфной функции f определен дивизор нулей и полюсов $(f) = \sum_{D_i} \mathrm{ord}_{D_i}(f) D_i$. Дивизоры нулей и полюсов функций называются *главными*. Говорят, что два дивизора D и D' *линейно эквивалентны*, если их разность – главный дивизор: $D = D' + (f)$. Линейная эквивалентность обозначается $D \sim D'$. Если $D \sim D'$, то мероморфная функция f такая, что $D = D' + (f)$ однозначно определяется с точностью до пропорциональности. Действительно, если существует другая такая функция f', то f/f' не имеет ни нулей, ни полюсов и поэтому является константой. Таким образом, имеется точная последовательность

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathcal{M}(X)^* & \longrightarrow & \mathrm{Div}(X) \\ & & & & f & \longrightarrow & (f). \end{array}$$

Линейные системы

Пусть D – дивизор на X. *Полной линейной системой* называется множество

$$|D| := \{D' \mid D' \sim D, \quad D' \geq 0\}.$$

Иначе говоря,

$$|D| := \{D + (f) \mid f \in \mathcal{M}(X)^*, \quad D + (f) \geq 0\}.$$

Множество

$$V := \{f \in \mathcal{M}(X)^* \mid D + (f) \geq 0\} \cup \{0\}$$

является векторным подпространством в $\mathcal{M}(X)$, а полная линейная система может быть отождествлена с его проективизацией:

$$\mathbb{P}(V) = |D|, \quad f \in V \setminus \{0\} \longrightarrow D + (f) \in |D|.$$

Следовательно, $|D|$ обладает структурой проективного пространства (когда $|D| \neq \varnothing$). *Линейной системой* называется проективное подпространство $\mathcal{L} \subset |D|$. Каждая линейная система является проективизацией векторного подпространства V.

Пример 1.4. Пусть $X = \mathbb{P}^d$. Тогда любое неприводимое аналитическое подмножество коразмерности 1 задается как множество нулей неприводимого однородного многочлена $f(x_0, \ldots, x_d)$. Поэтому существует взаимно однозначное соответствие между дивизорами на $\mathbb{P}^d$ и фактором множества однородных рациональных функций $f(x_0, \ldots, x_d) = g(x_0, \ldots, x_d)/h(x_0, \ldots, x_d)$ по $\mathbb{C}^*$. Аналогично, на $\mathbb{P}^d \times \mathbb{P}^r$ любой простой дивизор задается многочленом $f(x_0, \ldots, x_d, y_0, \ldots, y_r)$ однородным по группам переменных $x_0, \ldots, x_d$ и $y_0, \ldots, y_r$.

Базисным множеством линейной системы $\mathcal{L}$ называется пересечение носителей всех дивизоров из $\mathcal{L}$:

$$\operatorname{Bs}\mathcal{L} := \bigcap_{D \in \mathcal{L}} \operatorname{Supp}(D).$$

Неподвижными компонентами называются неприводимые аналитические подмножества $W \subset \operatorname{Bs}\mathcal{L}$ размерности $\dim X - 1$. Это – в точности общие компоненты для всех дивизоров $D \in \mathcal{L}$.

Теорема 1.5. *Существует взаимно однозначное соответствие между*

(i) рациональными отображениями $\psi\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^d$ такими, что $\psi(X)$ не содержится в подпространстве меньшей размерности;

(ii) d-мерными линейными системами без неподвижных компонент $\mathcal{L}$ на X с фиксированным изоморфизмом $\mathcal{L} \simeq \mathbb{P}^d$.

Более того, множество неопределенности отображения ψ совпадает с $\operatorname{Bs}\mathcal{L}$. В частности, ψ является голоморфным отображением тогда и только тогда, когда $\operatorname{Bs}\mathcal{L} = \varnothing$.

Объяснение. Пусть задано отображение $\psi\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^d$. Для каждой гиперплоскости $H = \mathbb{P}^{d-1}$ в $\mathbb{P}^d$ определен полный прообраз ψ^*H. Поскольку все гиперплоскости линейно эквивалентны, то мы получаем линейную систему

$$\mathcal{L} = \{\psi^*H \mid H \text{ – гиперплоскость в } \mathbb{P}^d\}.$$

Обратно, пусть $\mathcal{L} \simeq \mathbb{P}^d$ – d-мерная линейная система без неподвижных компонент. Пусть $(\mathbb{P}^d)^\vee$ – двойственное проективное пространство, его точками являются гиперплоскости в $\mathbb{P}^d$. Рассмотрим отображение

$$X \dashrightarrow (\mathbb{P}^d)^\vee, \quad P \to \text{множество дивизоров в } \mathcal{L} \simeq \mathbb{P}^d\text{, проходящих через } P.$$

Отметим, что если $P \notin \operatorname{Bs}\mathcal{L}$, то прохождение дивизора через P – одно условие, заданное линейным уравнением. Поэтому множество дивизоров в $\mathcal{L} \simeq \mathbb{P}^d$, проходящих через P, – гиперплоскость в $\mathcal{L} = \mathbb{P}^d$. Если же $P \in \operatorname{Bs}\mathcal{L}$, то это множество совпадает с $\mathcal{L}$ и отображение не определено в P.

Зафиксируем базис $s_0, \ldots, s_d$ в пространстве сечений V. Тогда отображение ψ может быть задано также следующим образом:

$$P \longrightarrow (s_0(P) : \cdots : s_d(P)).$$

Отметим также, что отображение, заданное линейной подсистемой $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$ получается как композиция ψ с проекцией на соответствующее подпространство. □

Пример 1.6. Пусть $X = \mathbb{P}^2$, а $|L|$ – линейная система прямых на $\mathbb{P}^2$. Тогда $\dim|L| = 2$ и $\operatorname{Bs}|L| = \varnothing$. Поэтому $|L|$ задает голоморфное отображение (морфизм) $\psi\colon X \to \mathbb{P}^2$. Каждая точка $P \in X = \mathbb{P}^2$ переходит при этом в прямую $\{L \in |L| = \mathbb{P}^{2\vee} \mid P \in L\}$. Прямые на $\mathbb{P}^{2\vee}$ параметризуются точками первоначальной проективной плоскости $\mathbb{P}^2 = X$. Поэтому ψ – изоморфизм.

Пример 1.7. Пусть $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Как говорилось ранее любой эффективный дивизор на X задается многочленом $f(x, y; u, v)$ однородным по x, y и по u, v. Такой дивизор имеет *бистепень* (d_1, d_2). Здесь d_1 и d_2 – степени по переменным x, y и u, v, соответственно. Два таких дивизора линейно эквивалентны, если их бистепени совпадают. Рассмотрим теперь полную линейную систему $|D|$ дивизоров бистепени (d_1, d_2), $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$. Ясно, что $\mathrm{Bs}\,|D| = \varnothing$: для любой точки $P = (x:y;u:v) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ существует многочлен $f(x,y;u,v)$ соответствующей степени, не обращающийся в нуль в P. Поэтому $|D|$ задает морфизм

$$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^{(d_1+1)(d_2+1)-1},$$
$$(x:y;u:v) \longrightarrow (x^{d_1}u^{d_2} : x^{d_1-1}yu^{d_2} : \cdots : y^{d_1}uv^{d_2-1} : y^{d_1}v^{d_2}),$$

который является вложением и называется *вложением Сегре*.

Обратимые пучки и линейные расслоения

Для каждого дивизора D существует открытое покрытие $\cup U_\alpha = X$ такое, что ограничение $D|_{U_\alpha}$ является главным дивизором: $D|_{U_\alpha} = (f_\alpha)$ для некоторой функции $f_\alpha \in \mathcal{M}(U_\alpha)$. Причем отношение f_α/f_β является голоморфной, не обращающейся в нуль, функцией на пересечении $U_\alpha \cap U_\beta$. Набор (U_α, f_α) задает глобальное сечение факторпучка $\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$ пучка ненулевых мероморфных функций $\mathcal{M}^*$ по пучку голоморфных, не обращающихся в нуль, функций $\mathcal{O}^*$. Таким образом, $\mathrm{Div}(X) \simeq H^0(\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*)$.

Пучок $\mathcal{O}_X$-модулей называется *обратимым*, если он локально свободен и имеет ранг 1. Каждому дивизору D соответствует обратимый подпучок $\mathcal{O}_X(D)$ постоянного пучка глобальных мероморфных функций $\mathcal{M}(X)$:

$$\mathcal{O}_X(D)(U) = \{s \in \mathcal{M}(X) \mid D|_U + (s)|_U \geq 0\}$$

для любого открытого подмножества $U \subset X$. Если D на U задается уравнением $f = 0$, где $f \in \mathcal{M}(U)$, то $\mathcal{O}_X(D)(U)$ порождается как $\mathcal{O}_X(U)$-модуль элементом f^{-1}, т.е. любой элемент $s \in \mathcal{O}_X(D)(U)$ представляется в виде $s = hf^{-1}$, где h – голоморфная функция на U. Таким образом, если (U_α, f_α) – локально главное покрытие для D, то $\mathcal{O}_X(D)$ – подпучок $\mathcal{M}(X)$, порожденный как $\mathcal{O}_X$-подмодуль элементами f_α^{-1} на U_α. При этом линейно эквивалентным дивизорам соответствуют изоморфные обратимые пучки. Напомним, что множество обратимых пучков по с точностью до изоморфизма обозначается $\mathrm{Pic}(X)$. Оно является группой относительно операции тензорного произведения и называется группой Пикара и обозначается $\mathrm{Pic}(X)$. Таким образом, мы имеем вложение групп

$$(\mathrm{Div}(X)/\sim) \hookrightarrow \mathrm{Pic}(X).$$

Дадим когомологическую интерпретацию этого вложения. Пусть $\mathcal{L}$ – обратимый пучок на X. Рассмотрим покрытие $X = \cup U_\alpha$ такое, что $\mathcal{L}|_{U_\alpha} \simeq \mathcal{O}_{U_\alpha}$. Тогда $\mathcal{L}|_{U_\alpha}$ порождается элементом f_α, а на $U_\alpha \cap U_\beta$ возникают обратимые голоморфные функции $g_{\alpha\beta} := f_\alpha f_\beta^{-1}$. Эти функции называются *функциями перехода*. Они удовлетворяют соотношениям

$$g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\alpha} = 1, \qquad g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} \circ g_{\gamma\alpha} = 1. \tag{1}$$

Обратно, по набору функций $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}_X^*(U_\alpha \cap U_\beta)$ строится обратимый пучок. Если мы выберем другие порождающие f'_α, то $f'_\alpha = f_\alpha h_\alpha$ для $h_\alpha \in \mathcal{O}_X^*(U_\alpha)$. Тогда новые функции перехода связаны со старыми соотношением

$$g'_{\alpha\beta} = (h_\alpha/h_\beta) g_{\alpha\beta}. \tag{2}$$

Соотношения (1) и (2) показывают, что обратимые пучки задаются элементом группы когомологий Чеха $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$. Мы показали, что

$$\mathrm{Pic}(X) \simeq H^1(X, \mathcal{O}_X^*).$$

Далее, точная последовательность пучков

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X^* \longrightarrow \mathcal{M}_X^* \longrightarrow \mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0$$

индуцирует точную последовательность когомологий

$$\begin{array}{ccccc} H^0(\mathcal{M}_X^*) & \longrightarrow & H^0(\mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^*) & \xrightarrow{\delta} & H^1(\mathcal{O}_X^*) \\ & & \| & & \| \\ & & \mathrm{Div}(X) & & \mathrm{Pic}(X) \end{array}$$

Ядро отображения δ состоит в точности из главных дивизоров. В общем случае отображение δ не сюръективно. Более того, существуют компактные комплексные поверхности, для которых $\mathrm{Div}(X) = 0$.

Мероморфным сечением обратимого s пучка $\mathcal{L}$ называется сечение пучка $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}(X)$. Оно задается набором мероморфных функций $\varphi_\alpha \in \mathcal{M}(U_\alpha)$ таких, что $\varphi_\alpha = g_{\alpha\beta}\varphi_\beta$. Каждое мероморфное сечение определяет дивизор $D = (s)$, причем различные мероморфные сечения определяют линейно эквивалентные дивизоры. Эта конструкция обратна рассмотренной выше: $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_X(D)$. Поэтому обратимый пучок, имеющий ненулевое мероморфное сечение, принадлежит образу δ. Наоборот, если $\mathcal{L} = \delta(D)$, то $\mathcal{L}$ имеет мероморфное сечение. В частности, отображение δ сюръективно при условии, что X проективно (в этом случае все функции перехода $g_{\alpha\beta}$ могут быть выбраны рациональными).

Пусть $\pi\colon L \to X$ – линейное расслоение на X. Оно задается открытым покрытием $\cup U_\alpha = X$ и набором тривиализаций

$$\varphi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}.$$

Функции

$$g_{\alpha\beta} := \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}, \qquad g_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbb{C}^*$$

также называются функциями перехода. Они удовлетворяют соотношениям (1). Отсюда немедленно получается, что группа линейных расслоений (с точностью до изоморфизма) с операцией тензорного умножения изоморфна группе $\mathrm{Pic}(X)$ обратимых пучков. При этом линейному расслоению L соответствует пучок его сечений $\mathcal{O}_X(L)$.

2. Пересечения дивизоров

27 мая 2002

Теория пересечений

Пусть X – алгебраическая проективная поверхность. Определим *индекс пересечения* дивизоров на X как симметричную билинейную форму

$$\mathrm{Div}\, X \times \mathrm{Div}(X) \to \mathbb{Z}, \quad (D, G) \to D \cdot G$$

удовлетворяющую следующим двум условиям:

(i) если $D \sim D'$, то $D \cdot G = D' \cdot G$ для любого G;

(ii) если D и G – различные простые дивизоры, пересекающиеся трансверсально, то $D \cdot G = \# D \cap G$.

Можно показать, что индекс пересечения существует (т.е. корректно определен) и единственен. В случае проективных поверхностей $\mathrm{Pic}(X) \simeq \mathrm{Div}(X)/\sim$. Поэтому индекс пересечения определяет билинейную форму $\mathrm{Pic}(X) \times \mathrm{Pic}(X) \to \mathbb{Z}$.

Замечание 2.1. Пусть дивизоры D и $G = \sum g_i G_i$ не имеют общих компонент. Тогда

$$D \cdot G = \sum_{P \in \mathrm{Supp}(D) \cap \mathrm{Supp}(G)} (D \cdot G)_P,$$

где локальный индекс пересечения $(D\cdot G)_P$ вычисляется следующим образом. Рассмотрим локальное уравнение $f(x,y)$ дивизора D в P и пусть t – локальный параметр компоненты G_i (т.е. G_i является образом голоморфного отображения $t\to(x(t),y(t))$ вблизи P). Тогда

$$(D\cdot G_i)_P = \text{порядок нуля функции } f(x(t),y(t))\textit{б} \qquad (D\cdot G)_P=\sum g_i(D\cdot G_i)_P.$$

Существует еще несколько (эквивалентных) способов определить индекс пересечения.

Пусть $C\subset X$ простой дивизор и пусть $\mathcal{L}$ – обратимый пучок на X. Имеется голоморфное отображение, называемое *нормализацией* кривой, $\nu\colon\tilde C\to X$ такое, что кривая $\tilde C$ неособа и $\nu(\tilde C)=C$. Положим

$$\mathcal{L}\cdot C:=\deg\nu^*\mathcal{L}.$$

Это определяет билинейную форму $\mathrm{Pic}(X)\times\mathrm{Div}(X)\to X$. Можно показать, что $\mathcal{L}\cdot D$ зависит от класса линейной эквивалентности дивизора D. В частности, мы положим $G\cdot D=\mathcal{O}_X(G)\cdot D$.

Наконец, экспоненциальная последовательность

$$0\longrightarrow\mathbb{Z}\longrightarrow\mathcal{O}_X\xrightarrow{\exp}\mathcal{O}_X^*\longrightarrow 1$$

определяет отображение

$$\mathrm{Pic}(X)\simeq H^1(X,\mathcal{O}_X^*)\xrightarrow{c_1}H^2(X,\mathbb{Z}). \tag{3}$$

Тогда $\smile$-произведение на $H^2(X,\mathbb{Z})$ индуцирует билинейную форму на $\mathrm{Pic}(X)$, которая совпадает с определенными выше. Последний способ годится для произвольных (необязательно проективных) компактных комплексных поверхностей, на которых возможно, что отображение $\mathrm{Div}(X)\to\mathrm{Pic}(X)$ не является сюръективным.

Пример 2.2. Рассмотрим поверхность $X\subset\mathbb{P}^3$ степени d. Предположим, что существует прямая $L\subset X$. Вычислим индекс самопересечения L^2. Для этого проведем гиперплоское сечение $X\cap\mathbb{P}^2=L+C$ через L. Тогда дивизор $L+C$ линейно эквивалентен любому другому гиперплоскому сечению H. Отсюда

$$1=H\cdot L=(L+C)\cdot L=L^2+C\cdot L.$$

По теореме Безу $C\cdot L=d-1$ (так как C – плоская кривая степени $d-1$). Поэтому $L^2=2-d$.

Пример 2.3. Пусть $\sigma\colon\tilde{\mathbb{P}}^2\to\mathbb{P}^2$ – раздутие точки $P\in\mathbb{P}^2$ и пусть $E\subset\tilde{\mathbb{P}}^2$ – исключительный дивизор. Вычислим E^2. Проведем прямую H через P. Рассмотрим аффинную карту $\mathbb{C}^2_{x,y}$, в которой точка P – начало координат. Мы можем считать, что $H=\{x=0\}$. Тогда $\tilde{\mathbb{C}}^2\subset\tilde{\mathbb{P}}^2$ задается в $\mathbb{C}^2_{x,y}\times\mathbb{P}^1_{u,v}$ уравнением $xv=yu$. В этих обозначениях полный прообраз σ^*H высекается уравнением $x=0$. Отсюда видно, что $\sigma^*H=\tilde H+E$, где $\tilde H$ – собственный прообраз H. Легко видеть, что кривые $E=\{x=y=0\}$ и $\tilde H=\{x=u=0\}$ пересекаются трансверсально в одной точке. Таким образом, $(\tilde H+E)\cdot E=1+E^2$. С другой стороны, дивизор σ^*H линейно эквивалентен полному прообразу другой прямой L, не проходящей через P. Так как $\sigma^*L\cap E=\varnothing$, то

$$E^2=\sigma^*L\cdot E-1=-1.$$

Два дивизора (или линейных расслоения) D и D' называются *численно эквивалентными*, если $D\cdot C=D'\cdot C$ для любого дивизора C (достаточно проверить это равенство только для всех неприводимых кривых C). Численная эквивалентность обозначается $D\equiv D'$. По определению, линейная влечет численную эквивалентность. Отображение (3) индуцирует следующие вложения

$$(\mathrm{Div}(X)/{\equiv})\hookrightarrow(\mathrm{Pic}(X)/{\equiv})\hookrightarrow(H^2(X,\mathbb{Z})/\,\mathrm{Tors}),$$

где $\mathrm{Tors}\subset H^2(X,\mathbb{Z})$ – подгруппа кручения. Последнее отображение является вложением в силу двойственности Пуанкаре. Образ $\mathrm{Pic}(X)$ в $H^2(X,\mathbb{Z})$ совпадает с пересечением $H^2(X,\mathbb{Z})\cap H^{1,1}(X)$ в $H^2(X,\mathbb{C})$ (теорема Лефшеца об $(1,1)$-классах).

Теорема 2.4 (теорема Ходжа об индексе). *Если X – проективная алгебраическая поверхность, то форма пересечения на* $(\mathrm{Pic}(X)/\equiv)\otimes\mathbb{R}$ *имеет сигнатуру* $(1,\rho-1)$ *(где* $\rho=\rho(X)$ – число Пикара X, *размерность пространства* $(\mathrm{Pic}(X)/\equiv)\otimes\mathbb{R}$*).*

Доказательство легко получается из следующей леммы.

Лемма 2.5. *Пусть H – обильный дивизор на поверхности X (т.е. дивизор, некоторая положительная кратность nH которого является гиперплоским сечением при некотором вложении) и пусть D – дивизор такой, что $H\cdot D=0$. Тогда $D^2\le 0$. Более того, если $D^2=0$, то $D\equiv 0$.*

Набросок доказательства. Пусть $D^2>0$. Тогда по теореме Римана-Роха для $n\gg 0$ мы имеем $\dim|nD|>0$ (используется то, что $D\cdot(D+nH)=D^2>0$). Поэтому nD эффективен, что противоречит обильности H и $D\cdot H=0$. □

Замечание 2.6. Теорема Ходжа об индексе верна и для кэлеровых поверхностей. Более точно, форма пересечения на $(\mathrm{Pic}(X)/\equiv)\otimes\mathbb{R}$ имеет сигнатуру $(1,\rho-1)$, если $b_1(X)$ четно и $(0,\rho)$, если $b_1(X)$ нечетно.

Геометрический смысл индекса пересечения

Пусть морфизм (= голоморфное отображение) $\psi\colon X\to\mathbb{P}^N$ задается подсистемой $\mathcal{L}\subset|D|$ линейной системы $|D|$. Тогда

$$D^2=(\deg\psi(X))(\deg\psi),$$

где $\deg\psi$ – степень (количество прообразов общей точки) морфизма $\psi\colon X\to\psi(X)$. Если $\dim\psi(X)<\dim X(=2)$, то полагаем $\deg\psi=0$.

Пусть теперь $C\subset X$ – неприводимая кривая. Тогда

$$D\cdot C=(\deg\psi(C))(\deg\psi|_C).$$

Линейчатые поверхности

Определение 2.7. Поверхность X называется линейчатой, если существует голоморфное отображение $\pi\colon X\to B$ на гладкую кривую B (называемую базой), слои которого изоморфны $\mathbb{P}^1$.

Можно доказать, что расслоение $\pi\colon X\to B$ локально тривиально, т. е. существует такое покрытие $B=\cup U_i$ открытыми в топологии Зарисского множествами такими, что $\pi^{-1}(U_i)\simeq U_i\times\mathbb{P}^1$.

Линейчатые поверхности с базой $\mathbb{P}^1$ могут быть описаны (как абстрактные многообразия) следующим образом:

Пример 2.8. Пусть $\mathbb{P}^1=U_0\cup U_\infty$, где $U_0=\{t\in\mathbb{P}^1\mid t\ne\infty\}$, $U_\infty=\{t\in\mathbb{P}^1\mid t\ne 0\}$, а t – (неоднородная) координата на $\mathbb{P}^1$. Положим $X=(\mathbb{P}^1\times U_0)\cup(\mathbb{P}^1\times U_\infty)$, причем на $U_0\cap U_\infty$ точки $(x,t)\in\mathbb{P}^1\times U_0$ и $(y,t)\in\mathbb{P}^1\times U_\infty$ отождествляются, если $y=xt^n$, $n\ge 0$. Полученная поверхность обозначается через $\mathbb{F}_n$.

При склеивании $\mathbb{P}^1\times U_0$ с $\mathbb{P}^1\times U_\infty$ сечение $(0)\times U_0$ склеивается с $(0)\times U_\infty$ и дает сечение C_0, аналогично $(\infty)\times U_0$ дает сечение C_∞. Очевидно, $C_0\cap C_\infty=\varnothing$. Рассматривая функцию y – координату на $\mathbb{P}^1$ в $\mathbb{P}^1\times U_\infty$, мы получим, что ее дивизор полюсов $(y)_\infty$ равен C_∞, а дивизор нулей $(y)_0$ равен $(xt^n)_0=C_0+nF$, где F – слой. Отсюда $C_\infty\sim C_0+nF$ и, так как $C_0\cdot F=C_\infty\cdot F=1$, то $C_\infty^2=n$ и $C_0^2=-n$. Можно показать, что C_0 – единственная кривая на $X=\mathbb{F}_n$, имеющая отрицательный индекс самопересечения. Отсюда следует, что $\mathbb{F}_n$ и $\mathbb{F}_m$ не изоморфны при $n\ne m$.

Так как $\mathbb{F}_n$ содержит открытое по Зарисскому подмножество $\mathbb{P}^1\times U_0\simeq\mathbb{P}^1\times\mathbb{C}^1$, то линейчатые поверхности с базой $\mathbb{P}^1$ рациональны и называются рационально линейчатыми поверхностями. Известно, что любая рациональная линейчатая поверхность изоморфна одной из поверхностей $\mathbb{F}_n$.

Исключительные кривые

(-1)-кривой на компактной комплексной поверхности X называется кривая $E \subset X$ такая, что

(i) $E \simeq \mathbb{P}^1$;

(ii) $E^2 = -1$.

Теорема 2.9 (критерий Кастельнуово). *Пусть X – компактная комплексная поверхность и пусть $E \subset X$ – неприводимая кривая. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) существует компактная комплексная поверхность Y и бимероморфный морфизм $f\colon X \to Y$ такой, что $f_{X \setminus E}\colon X \setminus E \to Y \setminus \{P\}$ – изоморфизм для некоторой точки $P \in Y$ (существует стягивание E);

(ii) E – (-1)-кривая.

Морфизм f является раздутием точки P.

В случае проективных алгебраических поверхностей морфизм f строится как отображение $X \to Y \subset \mathbb{P}^N$, заданное линейной системой $|n(aH + bE)|$, где H – гиперплоское сечение поверхности X, $n \in \mathbb{N}$, $n \gg 0$, а числа $a, b \in \mathbb{N}$ находятся из условия $(aH + bE) \cdot E = 0$.

Морфизм $f\colon X \to Y$, обратный раздутию, называется *стягиванием (-1)-кривой.*

Следствие 2.10. *Поверхность является минимальной тогда и только тогда, когда она не содержит (-1)-кривых.*

Следствие 2.11. *Любая поверхность имеет минимальную модель. Более точно, для любой компактной комплексной поверхности X существует последовательность стягиваний (-1)-кривых*

$$X \longrightarrow X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_n$$

заканчивающаяся на минимальной поверхности X_n.

Пример 2.12. Поверхность $\mathbb{F}_n$ минимальна при $n \neq 1$, а при $n = 1$ сечение C_0 является (-1)-кривой. Линейчатые поверхности над кривыми рода $g \geq 1$ всегда минимальны.

Пример 2.13. Рассмотрим кубическую поверхность $X \subset \mathbb{P}^3$. Любая прямая на X является (-1)-кривой. Несложно указать конкретные кубические поверхности и прямые на них. Например, поверхность

$$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$$

содержит 27 прямые $x_i = \varepsilon_s x_j$, $x_k = \varepsilon_r x_l$, где $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$, а $\varepsilon_s^3 = -1$, $s = 1, 2, 3$. Существует множество из 6 непересекающихся прямых:

$$\begin{array}{ll}
L_1\colon & x_0 = \varepsilon_1 x_1, \quad x_2 = \varepsilon_1 x_3 \\
L_2\colon & x_0 = \varepsilon_2 x_1, \quad x_2 = \varepsilon_2 x_3 \\
L_3\colon & x_0 = \varepsilon_3 x_1, \quad x_2 = \varepsilon_3 x_3 \\
L_4\colon & x_0 = \varepsilon_1 x_2, \quad x_1 = \varepsilon_2 x_3 \\
L_5\colon & x_0 = \varepsilon_2 x_2, \quad x_1 = \varepsilon_3 x_3 \\
L_6\colon & x_0 = \varepsilon_3 x_2, \quad x_1 = \varepsilon_1 x_3
\end{array}$$

Согласно сказанному выше существует стягивание $\sigma\colon X \to \bar{X}$. Отметим, что поверхность X рациональна: существует бирациональное отображение

$$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 = L_1 \times L_2 \longrightarrow X, \quad (P, Q) \longrightarrow R,$$

где R – третья точка пересечения прямой $L_{P,Q}$, проходящей через P и Q с X. Позднее будет показано, что $\bar{X} \simeq \mathbb{P}^2$, т.е. поверхность X является раздутием шести различных точек на $\mathbb{P}^2$. Сложнее показать, что эта же конструкция возможна для произвольной гладкой кубической поверхности.

3. Рациональные линейчатые поверхности.

3 июня 2002

Напомним, прежде всего, что построенные на прошлой лекции поверхности $\mathbb{F}_n$ рациональны.

Теорема 3.1. *Пусть X – минимальная рациональная поверхность. Тогда $X \simeq \mathbb{P}^2$ или $X \simeq \mathbb{F}_n$, $n \neq 1$. В частности, все рациональные компактные комплексные поверхности являются проективными алгебраическими.*

На самом деле верно большее:

Теорема 3.2. *Компактная комплексная поверхность X максимальной алгебраической размерности (т.е. с $a(X) = 2$) является проективной алгебраической.*

В частности, проективны все линейчатые поверхности.

В случае $a(X) = 2$ поле $\mathcal{M}(X)$ совпадает с полем рациональных функций и полностью разделяет классы бирациональной эквивалентности: две поверхности X и X' бирационально изоморфны тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}(X) \simeq \mathcal{M}(X')$. Однако, эта алгебраическая переформулировка не упрощает проблему бирациональной классификации. В случае $a(X) = 1$ на X имеется только одна алгебраически независимая мероморфная функция, которая задает структуру эллиптического расслоения (см. ниже). В случае $a(X) = 0$ поле $\mathcal{M}(X) = \mathbb{C}$ никак не отражает структуру поверхности X.

3.3. При $n \neq 1$ поверхность $\mathbb{F}_n$ минимальна, отрицательное сечение C_0 поверхности $\mathbb{F}_1$ является (-1)-кривой. Можно явно построить морфизм стягивающий C_0. Для этого рассмотрим линейную систему $|C_0 + F|$, где F – слой. Так как $C_\infty \sim C_0 + F$ и $C_\infty \cap C_0 = \varnothing$, то $\operatorname{Bs}|C_0 + F| \supset C_\infty \cap F$, а так как слой F может быть выбран произвольным, то $\operatorname{Bs}|C_0 + F| = \varnothing$. Следовательно, линейная система $|C_0 + F|$ задает голоморфное отображение $\varphi\colon \mathbb{F}_1 \to \mathbb{P}^N$. Далее $1 = (C_0 + F)^2 = (\deg\varphi)(\deg\varphi(\mathbb{F}_1))$, то $\deg\varphi = \deg\varphi(\mathbb{F}_1) = 1$, т.е. отображение $\varphi\colon \mathbb{F}_1 \to \varphi(\mathbb{F}_1)$ однолистно в общей точке и $\varphi(\mathbb{F}_1) = \mathbb{P}^2$ – линейное подмногообразие в $\mathbb{P}^N$. С другой стороны, образ рационального отображения заданного линейной системой невырожден, т.е. не содержится ни в какой гиперплоскости. Поэтому $N = 2$ и $\varphi\colon \mathbb{F}^1 \to \mathbb{P}^2$ – бирациональный морфизм. Так как $C_0 \cdot (C_0 + F) = 0$, то $\varphi(C_0)$ – точка. Несложно показать теперь, что $\varphi\colon \mathbb{F}_1 \to \mathbb{P}^2$ – раздутие точки. Заметим также, что $(C_0 + F) \cdot F = 1$. Это показывает, что $\varphi(F)$ – одномерное семейство прямых, проходящих через точку $\varphi(C_0)$.

Пример 3.4. Рассмотрим поверхность X в $\mathbb{P}^4$, заданную тремя уравнениями

$$\begin{cases} x_1x_2 = x_0x_4 \\ x_0x_3 = x_1^2 \\ x_1x_4 = x_2x_3 \end{cases}$$

или, эквивалентно,

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = 1.$$

Легко видеть, что на X лежит семейство непересекающихся прямых

$$\{\alpha x_0 = \beta x_1, \quad \alpha x_1 = \beta x_3, \quad \alpha x_2 = \beta x_4\}, \quad (\alpha : \beta) \in \mathbb{P}^1$$

и отдельная прямая $\{x_0 = x_1 = x_3 = 0\}$, пересекающая все прямые из семейства. Морфизм

$$X \to \mathbb{P}^1, \quad (x_0 : \dots : x_4) \to (x_0 : x_1) = (x_1 : x_3) = (x_2 : x_4)$$

задает структуру $\mathbb{P}^1$-расслоения. С другой стороны, морфизм

$$X \to \mathbb{P}^2, \quad (x_0 : \dots : x_4) \to (x_0 : x_1 : x_3) = (x_1 : x_3 : x_4)$$

является бирациональным морфизмом, раздутием точки. Легко видеть, что $X \simeq \mathbb{F}_1$.

Теорема 3.5. *Существует следующая цепочка раздутий и стягиваний (-1)-кривых:*

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & X_1 & & \cdots & & X_n & & \cdots \\ & & \swarrow & & \searrow \quad \swarrow & & \searrow \quad \swarrow & & \searrow \quad \swarrow & \\ \mathbb{P}^2 & \leftarrow & \mathbb{F}_1 & & \mathbb{F}_2 & & \mathbb{F}_n & & \mathbb{F}_{n+1} & \end{array}$$

где каждый морфизм $X_n \to \mathbb{F}_n$ – раздутие точки, лежащей на отрицательном сечении C_0 поверхности $\mathbb{F}_n$, а каждый морфизм $X_n \to \mathbb{F}_{n+1}$ – раздутие точки, не лежащей на отрицательном сечении C_0 поверхности $\mathbb{F}_{n+1}$.

Доказательство опирается на следующую лемму:

Лемма 3.6. *Пусть $\sigma\colon \tilde{X} \to X$ – раздутие точки $P \in X$. Пусть C – неособая в P кривая и пусть $\tilde{C}$ – ее собственный прообраз. Тогда $\tilde{C}^2 = C^2 - 1$.*

Доказательство. Так как точка $P \in C$ неособа, то $\sigma^*C = \tilde{C} + E$, где E – исключительный дивизор. Отсюда

$$\tilde{C}^2 = (\sigma^*C - E)^2 = (\sigma^*C)^2 - 2\sigma^*C \cdot E + E^2 = C^2 - 0 - 1 = C^2 - 1.$$

□

Доказательство теоремы 3.5. Пусть на некотором шаге $\sigma_n\colon X_n \to \mathbb{F}_n$ – раздутие точки $P \in C_0 \subset \mathbb{F}_n$. Обозначим через $E \subset X_n$ – исключительный дивизор, через $F \subset \mathbb{F}_n$ – слой линейчатой поверхности, проходящий через P, а через $\tilde{F}$ и $\tilde{C}_0$ – собственные прообразы F и C_0, соответственно. Тогда $E^2 = -1$ и по лемме имеем $\tilde{F}^2 = -1$, $\tilde{C}_0^2 = -n - 1$. Согласно критерию Кастельнуово, кривые E и $\tilde{F}$ могут быть стянуты. Стягивание E не дает ничего нового: оно совпадает с σ. Пусть $f\colon X_n \to Y$ – стягивание $\tilde{F}$. Тогда Y имеет морфизм на $\mathbb{P}^1$ и содержит кривую-сечение $\bar{C}_0 := f(C_0)$ с индексом самопересечения $\bar{C}_0^2 = \tilde{C}_0^2 = -n - 1$. Поэтому $Y \simeq \mathbb{F}_{n+1}$. □

Замечание 3.7. Диаграмма из теоремы 3.5 может быть продолжена на одно звено влево:

$$\begin{array}{ccc} & X_0 & \\ \swarrow & & \searrow \\ \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 = \mathbb{F}_0 & & \mathbb{F}_1 \end{array}$$

Предложение 3.8. *Пусть $f\colon X \to B$ – линейчатая поверхность. Тогда*

(i) $\operatorname{Pic}(X) \simeq f^* \operatorname{Pic}(B) \oplus \mathbb{Z} \cdot C_0$*;*

(ii) $H^2(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \cdot F \oplus \mathbb{Z} \cdot C_0$.

Набросок доказательства. Пусть D – дивизор на X. Положим $D' = D - (D \cdot F)C_0$. Тогда $D' \cdot F = 0$. Достаточно доказать, что $D' \sim f^*L$ для некоторого дивизора L на B. Применим теорему Римана-Роха к дивизору $D'' = D' + nF$ для $n \gg 0$:

$$h^0(X, \mathcal{O}_X(D'')) + h^0(X, \mathcal{O}_X(K_X - D'')) \geq \frac{1}{2}(D'' - K_X) \cdot D'' + \chi(\mathcal{O}_X) =$$
$$\frac{1}{2}(D' - K_X + nF) \cdot (D' + nF) + \chi(\mathcal{O}_X) = -K_X \cdot nF + \mathrm{Const} > 0$$

при $n \gg 0$. Отсюда имеем $D' + nF \sim A$ или $K_X - D' - nF \sim A$, где A – эффективный дивизор. Но во втором случае мы имеем $0 \leq A \cdot F = (K_X - D' - nF) \cdot F = -2$. Противоречие. Поэтому $D' + nF \sim A$. Так как дивизор A эффективен и $A \cdot F = 0$, то A содержится в слоях. Второе утверждение следует из первого так как $H^2(X, \mathbb{Z}) \simeq \operatorname{Pic}(X)/(\text{непрерывная часть})$. Можно также дать чисто топологическое доказательство (ii). □

Следствие 3.9. *Отрицательное сечение C_0 – единственная кривая с отрицательным индексом самопересечения на $\mathbb{F}_n$ (при $n \geq 1$).*

Доказательство. Пусть C – неприводимая кривая с $C^2 < 0$. Запишем $C \sim aC_0 + bF$, где F – слой линейчатой поверхности. Тогда $0 \le F \cdot C = a$, $0 \le C \cdot C_0 = -na + b$ и $0 > C^2 = -na^2 + 2ab$, что дает нам противоречие. □

Отметим также, что рациональная линейчатая поверхность $\mathbb{F}_n$ может быть определена как проективизация $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{E})$ векторного расслоения $\mathcal{E} := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$ над $\mathbb{P}^1$.

В заключение мы приведем конструкцию проективного вложения рациональных линейчатых поверхностей. Для этого на $\mathbb{F}_n$ рассмотрим линейную систему $|C_0 + (n+1)F|$. Как и в 3.3 доказывается, что $\operatorname{Bs}|C_0 + (n+1)F| = \varnothing$. Следовательно, эта линейная система определяет голоморфное отображение $\varphi\colon \mathbb{F}_n \to \mathbb{P}^N$, $N = \dim|C_0 + (n+1)F|$. На самом деле можно показать, что φ является вложением: элементы линейной системы $|C_0 + (n+1)F|$ разделяют точки и касательные векторы. Далее $(C_0 + (n+1)F) \cdot C_0 = 1$, $(C_0 + (n+1)F) \cdot F = 1$ и $(C_0 + (n+1)F) \cdot C_\infty = n+1$. Отсюда $\deg\varphi(C_0) = \deg\varphi(F) = 1$, а $\deg\varphi(C_\infty) = n+1$. Таким образом, поверхность $\mathbb{F}_n \subset \mathbb{P}^N$ заметается непересекающимися прямыми $\varphi(F)$, соединяющими пары точек на прямой $\varphi(C_0)$ и рациональной кривой $\varphi(C_\infty)$ степени $n+1$.

Обратно, выберем непересекающиеся проективные подпространства $L = \mathbb{P}^1$ и $\Pi = \mathbb{P}^{n+1}$ в пространстве $\mathbb{P}^{n+3}$. Рассмотрим вложение Веронезе

$$\psi\colon \mathbb{P}^1 \to \Pi = \mathbb{P}^{n+1}, \qquad (u:v) \longrightarrow (u^{n+1} : u^n v : \cdots : uv^n : v^{n+1}).$$

Его образом является (гладкая) рациональная кривая $C := \psi(\mathbb{P}^1)$ степени $n+1$. Зафиксируем теперь изоморфизм γ между $L = \mathbb{P}^1$ и $C \simeq \mathbb{P}^1$ и рассмотрим одномерное семейство непересекающихся прямых L_P, соединяющих точки $P \in L$ и $\gamma(P) \in C$. Тогда прямые L_P заметают поверхность изоморфную $\mathbb{F}_n$.

Каноническое расслоение

Пусть X – комплексное многообразие размерности d и пусть T_X – касательное расслоение. Линейное расслоение $\mathcal{K}_X := \bigwedge^d T_X$ называется *каноническим* расслоением. Его сечениями являются дифференциальные формы старшей степени, локально записываемые в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d.$$

Пусть $X = \cup U_\alpha$ – открытое покрытие и пусть $x_1^\alpha, \ldots, x_d^\alpha$ – локальные координаты. Тогда функциями перехода для $\mathcal{K}_X$ на $U_\alpha \cap U_\beta$ будут

$$\frac{\partial(x_1^\alpha, \ldots, x_d^\alpha)}{\partial(x_1^\beta, \ldots, x_d^\beta)}.$$

Соответствующий обратимый пучок ω_X – пучок дифференциальных форм старшей степени. Отображение $c_1\colon \operatorname{Pic}(X) \to H^2(X, \mathbb{Z})$ задает выделенный элемент $c_1(X) = c_1(\mathcal{K}_X) \in H^2(X, \mathbb{Z})$ – *первый класс Чженя* многообразия X.

Предположим, что ω_X имеет глобальное мероморфное сечение s. Такое сечение всегда существует, если $a(X) = \dim X$ (тогда мы можем взять $s = df_1 \wedge \cdots \wedge df_d$, где $f_1, \ldots, f_n$ – алгебраически независимые элементы поля $\mathcal{M}(X)$). Дивизор нулей и полюсов (s) называется *каноническим дивизором*. Он определен с точностью до линейной эквивалентности и поэтому часто называется также *каноническим классом*.

Пример 3.10. Пусть X – комплексная группа Ли. Тогда касательное пространство тривиально T_X и поэтому $K_X = 0$. В частности, канонический класс комплексного тора тривиален.

4. Канонический класс.

6 июня 2002

О топологической эквивалентности рациональных линейчатых поверхностей

Во-первых отметим, что построенные рациональные линейчатые поверхности $\mathbb{F}_n$ не гомеоморфны друг другу. Действительно, $H^2(X,\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z} \cdot C_0 \oplus \mathbb{Z} \cdot F$, а форма пересечения задается соотношениями $C_0^2 = -n$, $F^2 = 0$, $C_0 \cdot F = 1$. Отсюда для любого элемента $x \in H^2(X,\mathbb{Z})$ имеем $x \sim \alpha C_0 + \beta F$ для некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ и $x^2 = -n\alpha + 2\beta$. Следовательно, при четном n решетка $H^2(X,\mathbb{Z})$ *четна* (т.е. x^2 четно для любого элемента), а при нечетном n – нечетна. Поскольку решетка $H^2(X,\mathbb{Z})$ является топологическим инвариантом, то при $n \not\equiv m \mod 2$ поверхности $\mathbb{F}_n$ и $\mathbb{F}_m$ не гомеоморфны.

Обратно, при $n \equiv m \mod 2$ поверхности $\mathbb{F}_n$ и $\mathbb{F}_m$ лежат в одном гладком семействе и потому диффеоморфны (здесь $H^2(\mathbb{F}_n,\mathbb{Z}) \simeq H^2(\mathbb{F}_m,\mathbb{Z})$). Напомним, что сюръективное голоморфное отображение $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{T}$ комплексных многообразий называется *гладким семейством*, если все слои – гладкие (и приведены, т.е. не являются кратными) и для каждой точки $x \in \mathfrak{X}$ дифференциал $df\colon T_{x,\mathfrak{X}} \to T_{f(x),\mathfrak{T}}$ сюръективен. В этом случае автоматически слои равноразмерны. Говорят, что многообразия V_1 и V_2 лежат в гладком семействе, если существует гладкое семейство $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{T}$, для которого V_1 и V_2 являются его слоями. Несложно построить такое гладкое семейство в нашем случае: пусть $\mathfrak{T} = \mathbb{C}_t$, а $\mathfrak{X}$ задается в $\mathbb{P}^2_{y_0:y_1:y_2} \times \mathbb{P}^1_{x_0:x_1} \times \mathbb{C}_t$ уравнением

$$x_0^n y_1 - x_1^n y_2 + t x_0^{n-m} x_1^m y_0 = 0.$$

Проекция $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{T}$ – гладкое семейство, причем слой $x_0^n y_1 - x_1^n y_2 = 0$ над $t = 0$ изоморфен $\mathbb{F}_n$ (докажите!), а слой над $t \neq 0$ изоморфен $\mathbb{F}_{n-2m}$. Далее мы можем воспользоваться следующим общим фактом: гладкое <u>комплексное</u> семейство локально тривиально как отображение дифференцируемых многообразий (в частности, все слои диффеоморфны).

Примеры вычисления канонического класса

Рассмотрим теперь несколько примеров вычисления канонического класса. Для простоты мы предполагаем, что все многообразия проективны (или, по крайней мере, имеют максимальную алгебраическую размерность).

Пример 4.1. Пусть $X = \mathbb{P}^d$ и пусть $(x_0 : \cdots : x_d)$ – однородные координаты. Тогда отношения $x_1/x_0, \ldots, x_d/x_0$ являются глобальными мероморфными алгебраически независимыми функциями на X. Рассмотрим рациональную форму $s = d(x_1/x_0) \wedge \cdots \wedge (x_d/x_0)$. Она является голоморфной в карте $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$. В другой карте $U_i = \{x_i \neq 0\}$ эта форма преобразуется к виду

$$s = d\frac{x_1/x_i}{x_0/x_i} \wedge \cdots \wedge d\frac{1}{x_0/x_i} \wedge \cdots \wedge d\frac{x_d/x_i}{x_0/x_i} =$$
$$- \left(\frac{1}{x_0/x_i}\right)^{d+1} d(x_1/x_i) \wedge \cdots \wedge d(x_0/x_i) \wedge \cdots \wedge d(x_d/x_i).$$

Пример 4.2. Пусть $X = \mathbb{F}_n$. Рассмотрим рациональную форму $s = dx \wedge dt$. В карте $\{x \neq \infty\} \times U_0$ она не имеет ни нулей, ни полюсов. В карте $\{y \neq 0\} \times U_\infty$ локальными координатами являются $y' = 1/y$ и $t' = 1/t$. Имеем

$$s = d(y/t^n) \wedge dt = t^{-n} dy \wedge dt = t'^n dy'^{-1} \wedge dt'^{-1} = t'^{n-2} y'^{-2} dy' \wedge dt'.$$

Отсюда $K_X = -2C_\infty + (n-2)F = -2C_0 - 2nF + (n-2)F = -2C_0 - (n+2)F$.

Пример 4.3. Пусть $X = V \times W$. Тогда $\omega_X = \mathrm{pr}_1^* \omega_V \otimes \mathrm{pr}_2^* \omega_W$.

Пример 4.4. Пусть $X \subset M$ – подмногообразие коразмерности 1. Рассмотрим мероморфное сечение пучка $\omega_M(X)$. Запишем его локально вблизи $P \in X$ в виде

$$s = \frac{g(x_0, \dots, x_d) dx_0 \wedge \dots \wedge dx_d}{f(x_0, \dots, x_d)},$$

где $f = 0$ – локальное уравнение X. Предположим, что $\partial f / \partial x_i \neq 0$ в P. Тогда $x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_d$ – локальные координаты на X. Положим

$$\mathrm{P.R.}(s) = (-1)^{i-1} \frac{g dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_d}{\partial f / \partial x_i} \Bigg|_X . \tag{4}$$

Несложно проверить, что (4) определяет мероморфную $d-1$-форму на X.

Следовательно,

$$\omega_M \otimes \mathcal{O}_M(X)|_X \simeq \omega_X.$$

Эта формула называется *формулой присоединения.* Для дивизоров она выглядит следующим образом:

$$(K_M + X)|_X = K_X.$$

Пример 4.5. Пусть C – алгебраическая кривая. Тогда по теореме Римана-Роха $\deg K_C = 2g(C) - 2$ и $\dim |K_X| = g(C) - 1$. Линейная система $|K_X|$ не имеет базисных точек и задает голоморфное отображение $\varphi \colon C \to \mathbb{P}^{g-1}$. Причем имеет место одно из следующих

- φ является вложением, образ которого имеет степень $2g - 2$ называется *канонической* кривой;
- φ отображает C 2-листно на рациональную кривую $\Gamma \subset \mathbb{P}^{d-1}$ степени $d - 1$ (такие кривые C называются *гиперэллиптическими*).

Пример 4.6. Если $C \subset X$ – гладкая кривая на поверхности, то по формуле присоединения имеем

$$2g(C) - 2 = (K_X + C) \cdot C.$$

В частности, кривая $C \subset \mathbb{P}^2$ степени d имеет род $g(C) = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$. Кривая $C \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ бистепени (a, b) имеет род $g(C) = (a-1)(b-1)$.

Из последнего примера немедленно получаем.

Следствие 4.7. *Кривая E на поверхности Y является (-1)-кривой тогда и только тогда, когда $E^2 = K_Y \cdot E = -1$.*

Доказательство. Если кривая E неособа, то $-2 \geq 2g(C) - 2 = K_Y \cdot E + E^2$. Откуда и получается утверждение. В случае, когда кривая C особа, мы можем заменить $g(C)$ на ее арифметический род $p_a(C) := \dim H^1(C, \mathcal{O}_C)$. □

Пример 4.8. Пусть $\sigma \colon \tilde{X} \to X$ – раздутие точки $P \in X$. Рассмотрим локальные координаты x, y в окрестности $P \ni U \subset X$ и пусть E – исключительный дивизор. Тогда $\sigma^{-1}(U)$ задается в $U \times \mathbb{P}^1$ уравнением $xv = yu$. Пусть $s = h(x, y) dx \wedge dy$ – рациональная дифференциальная форма. В карте $v \neq 0$ локальными координатами являются y и $u' := u/v$, причем $x = yu'$. Тогда $\sigma^* s = h(yu') y du' \wedge dy$. Отсюда $(\sigma^* s) = \sigma^*(s) + E$. Таким образом имеем $K_{\tilde{X}} = \sigma^* K_X + E$.

Отсюда (и из формулы для рода) получаем, что $K_{\tilde{X}} \cdot E = -1$.

Пример 4.9. Пусть $X = X_d \subset \mathbb{P}^3$ – поверхность степени d и пусть H – ее гиперплоское сечение. Тогда по формуле присоединения

$$K_X = (K_{\mathbb{P}^3} + X)|_X = -4H + dH = (d-4)H.$$

Отсюда видно, что поверхность X минимальна при $d \neq 3$. Действительно, для любой кривой $E \subset X$ имеем

$$K_X \cdot E = (d-4)H \cdot E = (d-4)\deg E \neq -1.$$

При $d = 3$ отсюда мы получаем, что (-1)*-кривые на кубической поверхности* $X_3 \subset \mathbb{P}^3$ *– в точности прямые, лежащие на* X_3. Как уже говорилось, на неособой кубической поверхности лежит ровно 27 прямых.

Пример 4.10. Пусть $X = X_{d_1\cdots d_r} \subset \mathbb{P}^{2+r}$ – поверхность полное пересечение гиперповерхностей $W_1, \dots, W_r$ степеней $d_1, \dots, d_r \geq 2$ ($r \geq 2$) и пусть H – ее гиперплоское сечение. Как и выше имеем

$$K_X = (K_{\mathbb{P}^{2+r}} + W_1 + \dots + W_r)|_X = -(3+r)H + \left(\sum d_i\right) H = \left(\sum (d_i - 1) - 3\right) H.$$

Пусть $E \subset X$ – (-1)-кривая. Тогда

$$K_X \cdot E = \left(\sum (d_i - 1) - 3\right) \deg E = -1.$$

Отсюда $\deg E = 1$ и $\sum_{i=1}^r (d_i - 1) = 2$. Последнее возможно только если $r = 2$ и $d_1 = d_2 = 2$, т.е. $X = W_2 \cap W_2'$ – пересечение двух квадрик (поверхность степени 4). Известно, что на такой X лежит ровно прямых (которые являются (-1)-кривыми).

Пример 4.11. Пусть $f\colon X \to Y$ – конечный сюръективный морфизм (т.е. морфизм при котором прообраз каждой точки является конечным множеством) и пусть $f_1, \dots, f_d$ – алгебраически независимые элементы поля $\mathcal{M}(Y)$, где $d = \dim Y$. Рассмотрим форму $s = df_1 \wedge \dots \wedge df_d$ на Y. В локальных координатах $y_1, \dots, y_d$ вблизи некоторой точки $P \in Y$ она может быть записана в виде $s = g(y_1, \dots, y_d) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_d$. Пусть $x_1, \dots, x_n$ – локальные координаты вблизи точки $Q \in f^{-1}(P)$. Рассмотрим форму $f^*s = df^*(f_1) \wedge \dots \wedge f^*(f_d)$. В наших локальных координатах она имеет вид

$$f^*s = g(y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_d(x_1, \dots, x_n)) dy_1(x_1, \dots, x_n) \wedge \dots \wedge dy_d(x_1, \dots, x_n) =$$
$$g(x_1, \dots, x_n) \det \left\| \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right\| dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Таким образом, K_X локально задается уравнениями $f^*(g) = g(x_1, \dots, x_n) = 0$ и $\det \left\| \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right\| = 0$. Это показывает, что

$$K_X = f^*K_Y + B,$$

где B – эффективный дивизор, так называемый, *дивизор ветвления* f. Отметим, что в общей точке каждой компоненты $B_i \subset \operatorname{Supp}(B)$ мы можем выбрать локальные координаты так, что $y_1 = x_1$, …, $y_{d-1} = x_{d-1}$, $y_d = x_d^{m_i}$. Тогда коэффициент при B_i в B равен $m_i - 1$.

Индекс самопересечения канонического класса $\omega_X^2 = c_1(X)^2$ дает еще один важный целочисленный инвариант. Рассмотрим, как он меняется при раздутии точки.

Лемма 4.12. *Пусть* $\sigma\colon \tilde{X} \to X$ *– раздутие точки. Тогда* $c_1(\tilde{X})^2 = c_1(X)^2 - 1$.

Доказательство. Из 4.8 имеем $c_1(\tilde{X}) = \sigma^* c_1(X) + E$. Отсюда

$$c_1(\tilde{X})^2 = (\sigma^* c_1(X))^2 + 2\sigma^* c_1(X) \cdot E + E^2 = c_1(X)^2 - 1.$$

$\square$

Теорема Римана-Роха

Канонический класс входит в формулу Римана-Роха, позволяющую вычислять размерности линейных систем. Для обратимого пучка $\mathcal{L}$ на (компактном комплексном) многообразии X определим его *эйлерову характеристику* следующим образом:

$$\chi(\mathcal{L}) := \sum_{i=0}^{\dim X} (-1)^i \dim H^i(X, \mathcal{L}).$$

Напомним теорему Римана-Роха для алгебраических кривых:

$$\chi(\mathcal{O}_X(D)) = \deg D + \chi(\mathcal{O}_X) = \deg D - g(X) + 1.$$

Для поверхностей также имеет место аналогичная формула:

$$\chi(\mathcal{O}_X(D)) = \frac{1}{2}(D - K_X) \cdot D + \chi(\mathcal{O}_X).$$

Используя двойственность Серра можно написать

$$h^0(X, \mathcal{O}_X(D)) + h^0(X, \mathcal{O}_X(K_X - D)) \geq \frac{1}{2}(D - K_X) \cdot D + \chi(\mathcal{O}_X).$$

Для вычисления $\chi(\mathcal{O}_X)$ имеется формула Нетера, которая рассматривается как часть теоремы Римана-Роха. Через $\chi_{\mathrm{top}}(X)$ мы обозначим топологическую Эйлерову характеристику X:

$$\chi_{\mathrm{top}}(X) := \sum_{i=1}^{2\dim X} (-1)^i b_i(X) = 2 - 2b_1 + b_2.$$

Теорема 4.13 (формула Нетера). *Пусть X – компактная комплексная поверхность. Тогда*

$$\omega_X^2 + \chi_{\mathrm{top}}(X) = 12\chi(\mathcal{O}_X). \tag{5}$$

Размерность Кодаиры

Число $\dim H^0(X, \omega_X)$ обозначается через $p_g(X)$ и называется *геометрическим родом*. Это – число линейно независимых глобальных голоморфных дифференциальных 2-форм на X. Обобщением геометрического рода является понятие кратного рода. Число

$$P_n(X) := \dim H^0(X, \omega_X^{\otimes n}) = \dim |nK_X| + 1$$

называется *n-кратным родом* поверхности. Его можно интерпретировать как число линейно независимых регулярных дифференциальных 2-форм s степени n; локально $s = f \cdot (dx \wedge dy)^n$, где x и y – локальные координаты, а f – голоморфная функция.

Предложение 4.14. *Плюрирод $P_n(X)$ является бирациональным инвариантом, т.е. если два компактных комплексных многообразия X и Y бимероморфно эквивалентны, то $P_n(X) = P_n(Y)$ для любого $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Рассмотрим для простоты случай $n = 1$. Пусть $\psi \colon X \to Y$ – бимероморфное отображение. Тогда существует аналитическое подмножество $V \subset X$ коразмерности ≥ 2 такое, что ограничение $\psi | X \setminus V$ – голоморфное отображение. Пусть $s_1, \ldots, s_m$ – базис пространства $H^0(Y, \omega_X)$ глобальных голоморфных форм. Тогда формы $\psi^* s_i$ голоморфны на $X \setminus V$ и линейно независимы. По принципу Хартогса они продолжаются до голоморфных форм на всем X. Отсюда $P_n(X) \geq P_n(Y)$. Применяя аналогичные рассуждения к ψ^{-1}, получим обратное неравенство. □

Таким образом, мы уже построили следующие бирациональные инварианты: алгебраическая размерность $a(X)$, фундаментальная группа $\pi_1(X)$, первое число Бетти $b_1(X)$, кратный род $P_n(X)$.

В теории алгебраических кривых (= компактных римановых поверхностей) существенно различаются кривые рода $g = 0$, $g = 1$ и $g > 1$. Это проявляется, например, при рассмотрении n-кратных канонических отображений, задаваемых n-кратным каноническим классом $|nK_X|$. Для $g = 0$ $|nK_X| = \varnothing$ при $n \in \mathbb{N}$, так что это отображение не определено; для $g = 1$ $K_X = 0$, так что это отображение является отображением в точку при любом $n \geq 0$; для $g > 1$ это отображение при $n \geq 3$ является голоморфным вложением. Эти три случая различают также тип универсального накрытия алгебраической кривой.

В соответствии с этим вводится важный бирациональный инвариант $\kappa(X)$ – *кодаирова* размерность, имеющий смысл для любых компактных комплексных многообразий X и определяемый следующим образом:

$$\kappa(X) = \begin{cases} \max_{n\in\mathbb{N}} \dim \varphi_{|nK_X|}(X), & \text{если } |nK_X| \neq \varnothing \text{ для некоторого } n, \\ -\infty, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Здесь $\varphi_{|nK_X|}\colon X \to \mathbb{P}^N$ – n-кратное каноническое рациональное отображение. Из определения ясно, что $\kappa(X)$ может принимать значения $-\infty, 0, 1, \dots, \dim X$. Более точно:

Предложение 4.15.

$$\kappa(X) \leq a(X) \leq \dim X.$$

Набросок доказательства. Пусть $\varphi = \varphi_{|nK_X|}\colon X \to \mathbb{P}^N$ – отображение, для которого

$$\dim \varphi_{|nK_X|}(X) = \kappa\ .$$

Тогда $\varphi(X)$ – проективное алгебраическое многообразие (возможно особое). Для него все глобальные мероморфные функции являются рациональными и $a(\varphi(X)) = \dim \varphi(X) = \kappa$. С другой стороны, отображение φ задает вложение полей $\varphi^*\colon \mathcal{M}(\varphi(X)) \hookrightarrow \mathcal{M}(X)$. Отсюда $\operatorname{tr}\deg \mathcal{M}(X) \geq \operatorname{tr}\deg \mathcal{M}(\varphi(X)) = \kappa$. $\square$

Отметим, что при $\kappa \geq 0$ канонический класс представляется дивизором K_X (а не только линейным расслоением). Из определения имеем

$$\begin{array}{lll} \kappa(X) = -\infty & \iff & P_n(X) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ \kappa(X) = 0 & \iff & P_n(X) \in \{0,1\}, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad P_n(X) = 1. \end{array}$$

Теорема 4.16. *Если $\kappa(X) \geq 1$, то существуют $c_1, c_2 > 0$ такие, что*

$$c_1 n^\kappa \leq P_n(X) \leq c_2 n^\kappa.$$

Эти соотношения иногда принимаются за определение кодаировой размерности. Можно сказать, следовательно, что $\kappa(X)$ выражает асимптотическое поведение бирациональных инвариантов $P_n(X)$ при $n \to \infty$.

Еще одно (эквивалентное) определение связано с *каноническим кольцом*

$$R(X) := \bigoplus_{n\geq 0} H^0(X, nK_X).$$

Можно показать, что $R(X)$ степень трансцендентности этого кольца равна $\kappa(X) + 1$ (если $\kappa \geq 0$).

5. Кодаирова размерность.

10 июня 2002

Прежде всего приведем несколько примеров вычисления кодаировой размерности.

Пример 5.1. Для алгебраической кривой X по теореме Римана-Роха имеем

$$\kappa(X) = \begin{cases} -\infty & \text{если } g(X) = 0, \text{ т.е. } X \simeq \mathbb{P}^1, \\ 0 & \text{если } g(X) = 1, \\ 1 & \text{если } g(X) > 1. \end{cases}$$

Пример 5.2. Равенство

$$\kappa(X \times Y) = \kappa(X) + \kappa(Y)$$

получается из соответствующего равенства $\omega_{X\times Y} = {\mathrm{pr}_1}^* \omega_X \times {\mathrm{pr}_1}^* \omega_Y$ для канонического класса. Вместе с предыдущим примером это показывает, что для алгебраического многообразия X все возможности $\kappa = -\infty, 0, \dots, \dim X$ реализуются.

Пример 5.3. Пусть $X = X_d \subset \mathbb{P}^3$ – поверхность степени d. При $d \le 3$ мы показали, что $-K_X$ обилен. Поэтому никакая положительная кратность K_X не может быть эффективной. Следовательно, $\kappa(X) = -\infty$. При $d = 4$ канонический класс тривиален. Поэтому $\kappa(X) = 0$. Наконец, при $d > 4$ канонический класс обилен: $K_X = (d-4)H$. Поэтому $\kappa(X) = 2$ (см. лемму ниже).

Лемма 5.4. *Предположим, что поверхность X удовлетворяет условиям $K_X^2 > 0$ и $P_m(X) > 0$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Тогда $\kappa(X) = 2$.*

Доказательство. Во-первых, $|-nK_X| = \varnothing$ при $n \in \mathbb{N}$. Действительно, предположим, что $|-nK_X| \ne \varnothing$ и пусть $D \in |-nK_X|$, $D' \in |mK_X|$. Тогда дивизор $nD' + mD$ эффективен, отличен от нуля и линейно эквивалентен нулю. Следовательно, существует глобальная мероморфная функция f такая, что $(f) = nD' + mD$. Так как этот дивизор эффективен, то f не имеет полюсов, т.е. голоморфна (и непостоянна). Противоречие.

Далее по теореме Римана-Роха при $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$P_n(X) = \dim H^0(X, \mathcal{O}_X(nK_X)) \ge \frac{1}{2}(n-1)nK_X^2 + \chi(\mathcal{O}_X).$$

В этом случае плюрироды $P_n(X)$ растут при $n \to \infty$ как $\frac{1}{2}(d-4)^2H^2n^2 = \frac{1}{2}(d-4)^2dn^2$. □

Пример 5.5. Пусть поверхность X имеет структуру расслоения с общим слоем – $\mathbb{P}^1$ (является бирационально линейчатой). Тогда $\kappa(X) = -\infty$. Действительно, предположим, что $|nK_X| \ne \varnothing$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$ и пусть $D \in |nK_X|$. Вычислим род общего слоя $F \simeq \mathbb{P}^1$.

$$-2 = 2g(F) - 2 = (K_X + F)\cdot F = K_X \cdot F = \frac{1}{n}D \cdot F \ge 0.$$

противоречие. В частности, $\kappa(X) = -\infty$ для рациональных поверхностей.

Теорема 5.6. *Если $\kappa(X) \ge 0$, то поверхность X имеет ровно одну минимальную модель.*

В случае $\kappa(X) = -\infty$ минимальная модель не единственна. Например, все поверхности $\mathbb{F}_n$, $n \ne 1$ и $\mathbb{P}^2$ – минимальные рациональные поверхности. Аналогично каждая иррациональная линейчатая поверхность имеет бесконечно много минимальных моделей.

Теорема 5.7. *Пусть X – минимальная комплексная поверхность с $\kappa(X) \ge 0$.*

(i) *Если $\kappa(X) = 2$, то линейная система $|nK_X|$, $n \leq 5$ задает бирациональный морфизм*

$$\varphi_{|nK_X|}\colon X \to Y \subset \mathbb{P}^N$$

на (возможно особую) поверхность Y. При этом могут стягиваться (в особые точки) лишь конечное число (-2)-кривых (т.е. кривых $C \subset X$ таких, что $C \simeq \mathbb{P}^1$ и $C^2 = -2$).

(ii) *Если $\kappa(X) = 1$, то линейная система $|nK_X|$ задает морфизм $\varphi_{|nK_X|}\colon X \to B \subset \mathbb{P}^N$ на кривую с общим слоем – эллиптической кривой.*

(iii) *Если $\kappa(X) = 0$, то $nK_X \sim 0$ для некоторого $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$.*

Определение 5.8. Поверхность X называется *эллиптической*, если существует морфизм $\varphi\colon X \to B$ на неособую кривую с общим слоем – эллиптической кривой.

Определение 5.9. Компактное комплексное многообразие X максимальной кодаировой размерности $\kappa(X) = \dim X$ называется *многообразием общего типа.*

Теорема 5.10. *Пусть X – минимальная компактная комплексная поверхность.*

(i) *Если $\kappa(X) \geq 0$, то K_X численно эффективен, т.е. $K_X \cdot C \geq 0$ для любой кривой C.*

(ii) *Если $0 \leq \kappa(X) \leq 1$, то $K_X^2 = 0$.*

(iii) *Если $\kappa(X) = 2$, то $K_X^2 > 0$.*

Заметим, что кодаирова размерность эллиптической поверхности не превосходит 1. Действительно, предположим, что $\kappa(X) = 2$ и пусть C – общий слой эллиптического расслоения $\varphi\colon X \to B$. По формуле для рода $(K_X + C) \cdot C = 0$. С другой стороны, $C^2 = 0$. Поэтому $K_X \cdot C = 0$. Пусть теперь $D \in |nK_X|$. Так как $D \cdot C = 0$, то D содержится в слоях φ. Следовательно, существует эффективный дивизор L на B такой, что $D \leq f^*L$. Но тогда $\dim |mnK_X| = \dim |mD| \leq \dim |mL| \leq \text{const} \cdot m$ — противоречие. С другой стороны, эллиптические поверхности кодаировой размерности $\kappa = -\infty, 0, 1$ существуют.

Пример 5.11. Рассмотрим две кубические кривые C_0 и C_1 на $\mathbb{P}^2$, пересекающиеся в 9 различных точках $P_1, \dots P_9$. Рассмотрим порожденную ими одномерную линейную систему $\{C_t\} = \langle C_0, C_1 \rangle$, где $t \in \mathbb{P}^1$ – одномерный параметр. Ясно, что $\mathrm{Bs}\{C_t\} = \{P_1, \dots P_9\}$. Пусть $\sigma\colon X \to \mathbb{P}^2$ – раздутие этих точек. Так как пересечение $C_0 \cap C_1$ – трансверсальное, то собственные прообразы $\tilde{C}_t$ кривых C_t не пересекаются. Следовательно, $\mathrm{Bs}\{\tilde{C}_t\} = \varnothing$ и эта линейная система задает голоморфное отображение на $\mathbb{P}^1$. Слоями будут эллиптические кривые $\tilde{C}_t$. Поэтому X имеет структуру эллиптической поверхности.

Теорема 5.12. *Пусть X – минимальная компактная комплексная поверхность с $\kappa = -\infty$. Тогда она – одна из следующих:*

(i) *рациональная поверхность, $X \simeq \mathbb{P}^2$ или $\mathbb{F}_n$; в этом случае X проективна;*

(ii) *линейчатая поверхность рода $g \geq 1$; в этом случае X также проективна, $b_1(X) = 2g$, $b_2(X) = 2$, $K_X^2 = 8(1-g)$, $\chi_{\mathrm{top}}(X) = 4(1-g)$;*

(iii) *поверхность класса VII; в этом случае X непроективна, $b_1(X) = 1$, $a(X) = 0$ или 1, $K_X^2 \leq 0$, $\chi_{\mathrm{top}}(X) \geq 0$;*

Рациональные и иррациональные линейчатые поверхности хорошо изучены. Напротив, поверхности класса VII очень плохо поддаются изучению. Приведем пример таких поверхностей.

Поверхности Хопфа

Пример 5.13. Рассмотрим *обобщенную поверхность Хопфа* $X = W/\mathbb{Z}$, где $W = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, а $\mathbb{Z}$ действует на W следующим образом:

$$(z_1, z_2) \longrightarrow (\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2), \qquad 0 < |\lambda_1|, |\lambda_2| < 1.$$

Отметим, что иногда рассматривают более общее определение: поверхностями Хопфа называются поверхности, универсальная накрывающая которых аналитически изоморфно W. Мы утверждаем, что $\kappa(X) = -\infty$, т.е. $P_n(X) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Докажем это, например, для $n = 1$. Предположим, что $p_g(X) > 0$ и пусть $s \in H^0(X, \omega_X)$ – глобальная голоморфная 2-форма. Рассмотрим ее подъем $\pi^* s$ относительно морфизма факторизации $\pi \colon W \to X$. Тогда $\pi^* s$ – $\mathbb{Z}$-инвариантная голоморфная 2-форма на $W = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ и по принципу Хартогса она продолжается до голоморфной 2-формы на всей плоскости $\mathbb{C}^2$. Вблизи нуля она записывается в виде $\pi^* s = f(z_1, z_2) dz_1 \wedge dz_2$, где $f(z_1, z_2)$ – голоморфная функция, удовлетворяющая условию

$$f(\lambda_1^k z_1, \lambda_2^k z_2) \lambda_1^k \lambda_2^k = f(z_1, z_2).$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$, получим $f(z_1, z_2) = 0$. Противоречие. Аналогично доказывается, что $H^0(X, \Omega_X) = 0$.

Ясно, что все поверхности Хопфа (в нашем определении) диффеоморфны $S^1 \times S^3$. Отсюда $b_1(X) = 1$ и $b_2(X) = 0$. В частности, все кривые на X гомологичны нулю и поверхность X непроективна. Поверхность X всегда содержит две кривые C_1 и C_2 – образы координатных прямых $\{z_2 = 0\}$ и $\{z_1 = 0\}$. Ясно, что $C_i \simeq \mathbb{C}^*/\mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}$ действует на $\mathbb{C}^*$ умножениями на λ_i. Эта кривая диффеоморфна $S^1 \times S^1$. Следовательно, C_1 и C_2 – эллиптические кривые.

Заметим, что на компактном комплексном многообразии никакой эффективный ненулевой дивизор D линейно не эквивалентен нулю (см. доказательство леммы 5.4). Следовательно, $C_i \not\sim 0$ и $\mathrm{Pic}(X) \neq 0$. С другой стороны, $\mathrm{Pic}(X) \simeq H^1(X, \mathcal{O}_X)/H^1(X, \mathbb{Z})$. Поэтому $H^1(X, \mathcal{O}_X) \simeq \mathbb{C}$ (поскольку $\dim H^1(X, \mathcal{O}_X) \le b_1(X) = 1$, см. ниже). Окончательно получаем, $\mathrm{Pic}(X) \simeq \mathbb{C}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{C}^*$, $h^{0,1}(X) = 1$ и $h^{1,0}(X) = 0$.

Так как все кривые на X гомологичны нулю, то через каждую точку проходит не более одной кривой. Далее пусть T – группа Ли $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$. Тогда естественное действие T на W коммутирует с действием $\mathbb{Z}$ и, поэтому, определяет действие $X = W/\mathbb{Z}$. Это действие имеет одну открытую орбиту $U = X \setminus (C_1 \cup C_2)$ и две замкнутых: C_1 и C_2. Зафиксируем точку $P \notin C_1 \cup C_2$. Отсюда видно, что для любой точки $Q \notin C_1 \cup C_2$ существует элемент $\varphi \in T$ такой, что $\varphi(P) = Q$. Если через P проходит кривая C, то через Q проходит кривая $\varphi(C)$. Возможны два случая:

(i) На X не существует кривых, отличных от C_1 и C_2. В этом случае $\mathcal{M}(X) = \mathbb{C}$. Действительно, пусть $f \neq \mathrm{Const}$ – глобальная мероморфная функция. Тогда эффективный ненулевой дивизор $(f)_0$ не пересекает C_1 и C_2. Отсюда $(f)_0 = a_1 C_1 + a_2 C_2$. Аналогично $(f)_\infty = b_1 C_1 + b_2 C_2$. Поэтому мы можем считать, что $(f) = c_1 C_1 - c_2 C_2$, где $c_1, c_2 \in \mathbb{N}$. Но тогда $c_1 C_1 \sim c_2 C_2$ и мы имеем одномерную линейную систему. Противоречие.

(ii) Через каждую точку X проходит ровно одна кривая и эта кривая неособа. По формуле для рода $2g(C) - 2 = \deg \omega_X|_C + C^2 = 0$. Таким образом, все кривые на X – эллиптические. В этом случае $a(X) = 1$.

Случай (ii) эквивалентен тому, что $\lambda_1^{k_1} = \lambda_2^{k_2}$ для некоторых $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Действительно, тогда мы имеем мероморфную функцию $z_1^{k_1} z_2^{-k_2}$, задающую отображение на $\mathbb{P}^1$ и одномерное семейство кривых – слой отображения.

Другим примером поверхностей типа VII являются поверхности Иноуэ, на которых вообще не существует кривых. Полной классификации пока не известно.

Отступление:
Теория Ходжа на компактных комплексных поверхностях

Числа Ходжа компактного комплексного многообразия определяются следующим образом:

$$h^{p,q}(X) =: \dim H^q(X, \Omega_X^p).$$

В частности, $h^{0,1} = \dim H^1(X, \mathcal{O}_X)$ обозначается через $q(X)$ называется *иррегулярностью.*

Теорема 5.14. *Пусть X – компактная комплексная поверхность. Тогда когомологии Дольбо $H^{p,q}(X)$, $p+q=2$ естественно вкладываются в $H^2(X,\mathbb{C})$, так что $H^{2,0}(X) = \overline{H^{0,2}(X)}$ и имеет место разложение*

$$H^2(X,\mathbb{C}) = H^{2,0}(X) \oplus H^{1,1}(X) \oplus H^{0,2}(X).$$

Теорема 5.15. *Пусть X – компактная комплексная поверхность. Тогда*

(i) когомологии Дольбо $H^{1,0}(X)$ естественно вкладываются в $H^1(X,\mathbb{C})$, так что $H^{1,0}(X) \cap \overline{H^{0,1}(X)} = 0$;

(ii) отображение $H^{1,0}(X) \to H^{0,1}(X)$, $\omega \to \overline{\omega}$ является вложением.

Если $b_1(X)$ четно (например, если поверхность кэлерова), то имеет место обычное разложение Ходжа

$$H^2(X,\mathbb{C}) = H^{1,0}(X) \oplus H^{0,1}(X), \quad H^{1,0}(X) = \overline{H^{0,1}(X)}.$$

Следствие 5.16. *(i) $b_1(X) = h^{1,0}(X) + h^{0,1}(X)$;*

(ii) если $b_1(X)$ четно, то $h^{1,0}(X) = h^{0,1}(X)$ и $b^+(X) = 2p_g(X) + 1$;

(iii) если $b_1(X)$ нечетно, то $\dim H^0(X, \Omega_X) = h^{1,0}(X) = h^{0,1}(X) - 1 = q(X) - 1$ и $b^+(X) = 2p_g(X)$.

Обсудим теперь вопрос о рациональности поверхностей.

Теорема 5.17 (критерий рациональности Кастельнуово-Энрикевеса). *Проективная алгебраическая поверхность X рациональна тогда и только тогда, когда $P_2(X) = q(X) = 0$. Эквивалентно: $P_2(X) = h^{1,0}(X) = 0$.*

Напомним, что в одномерном случае также имеется численный критерий рациональности: кривая X рациональна (т.е. изоморфна $\mathbb{P}^1$) тогда и только тогда, когда $g(X) = 0$. В высших размерностях такого численного критерия не существует.

В качестве примера применения критерия Кастельнуово-Энрикевеса и других обсужденных фактов рассмотрим один частный класс поверхностей – поверхности дель Пеццо.

Поверхности дель Пеццо

Дивизор D на компактном комплексном многообразии называется *обильным*, если некоторая его положительная кратность nD является гиперплоским сечением при некотором голоморфном вложении $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ (в этом случае многообразие должно быть проективным алгебраическим). Рассматривая композиции вложения $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ с m-кратным вложением Веронезе $\mathbb{P}^N \hookrightarrow \mathbb{P}^{N'}$, можно показать, что nD является гиперплоским сечением тогда и только тогда, когда mnD является гиперплоским сечением. Поэтому свойство обильности не меняется при умножении на положительные числа.

Теорема 5.18 (теорема Кодаиры об обращении в нуль). *Пусть D – обильный дивизор на проективном алгебраическом многообразии X. Тогда*

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + D)) = 0, \qquad \forall i > 0.$$

Поверхностью дель Пеццо называется всякая проективная алгебраическая поверхность X, на которой антиканонический класс $-K_X$ обилен. Поверхности дель Пеццо являются антиподами поверхностей общего типа: напомню, что если на поверхности канонический класс обилен, то она – поверхность общего типа (см. лемму 5.4). Однако, обратное не верно.

Из теоремы 5.17 немедленно получаем.

Следствие 5.19. *Поверхности дель Пеццо рациональны.*

Действительно, $q(X) = \dim H^1(X, \mathcal{O}_X)$ обращается в нуль по теореме Кодаиры. Соображения, примененные нами при доказательстве леммы 5.4 дают нам $P_2(X) = 0$.

Отсюда легко видеть также, что

$$p_g(X) = h^{0,2}(X) = q(X) = h^{1,0}(X) = b_1(X) = P_n(X) = 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Из экспоненциальной последовательности получаем $\mathrm{Pic}(X) \simeq H^2(X, \mathbb{Z})$. Формула Нетера принимает вид

$$K_X^2 + b_2(X) = K_X^2 + \mathrm{rk}\,\mathrm{Pic}(X) = 10.$$

Так как $-K_X$ обилен, то $d := K_X^2 = (-K_X)^2 > 0$. Это число называется *степенью* поверхности дель Пеццо. Мы доказали, что

$$1 \leq d \leq 9, \quad 9 \geq b_2(X) \geq 1.$$

По теореме Римана-Роха $\dim |-K_X| = d$. Проективные модели поверхностей дель Пеццо описываются следующей теоремой:

Теорема 5.20. *Пусть X – поверхность дель Пеццо степени d.*

(i) При $3 \leq d \leq 9$ линейная система $|-K_X|$ определяет вложение $X \hookrightarrow \mathbb{P}^d$. Более точно:

- *а) при $d = 3$ $X = X_3 \subset \mathbb{P}^3$ – кубика;*
- *б) при $d = 4$ $X = X_{2\cdot 2} \subset \mathbb{P}^4$ – пересечение двух квадрик;*
- *в) при $d = 5$ $X = X_5 \subset \mathbb{P}^5$ – сечение грассманиана $\mathrm{Gr}(2,5)$, вложенного в $\mathbb{P}^9$ по Плюккеру, линейным подпространством $\mathbb{P}^5 \subset \mathbb{P}^9$;*
- *г) при $d = 6$ $X = X_6 \subset \mathbb{P}^6$ – сечение многообразия – образа вложения Сегре $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ в $\mathbb{P}^7$ гиперплоскостью;*
- *д) при $d = 7$ $X = X_7 \subset \mathbb{P}^7$ – поверхность степени 7;*
- *е) при $d = 8$ $X = X_8 \subset \mathbb{P}^8$ – образ вложения $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ линейной системой бистепени $(2,2)$ или образ вложения $\mathbb{F}_1$ линейной системой $|2C_0 + 3F|$;*
- *ж) при $d = 9$ $X = X_9 \subset \mathbb{P}^9$ – образ трехкратного вложения $\mathbb{P}^2$;*

При этом вложении образами (-1)-кривых являются прямые, лежащие на X_d.

(ii) При $d = 2$ линейная система $|-K_X|$ определяет двулистное накрытие с дивизором ветвления $B \subset \mathbb{P}^2$ степени 4.

(iii) При $d = 1$ линейная система $|-K_X|$ имеет (единственную) базисную точку и определяет рациональное отображение $X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$.

Теорема 5.21. *Пусть X – поверхность дель Пеццо степени d. Имеет место одно из следующих:*

(i) $X \simeq \mathbb{P}^2$;

(ii) $X \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$;

(iii) *$1 \le d \le 8$ и поверхность X является раздутием $\sigma\colon X \to \mathbb{P}^2$ множества $P_1, \dots, P_{9-d}$ из $9-d$ различных точек, находящихся в общем положении. Последнее означает, что никакие три точки не лежат на прямой и никакие шесть точек не лежат на конике.*

Набросок доказательства. Несложно показать, что $\mathbb{P}^2$ и $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ – единственные минимальные поверхности дель Пеццо. Действительно, предположим, что $X \simeq \mathbb{F}_n$. Тогда по формуле для рода

$$-2 = 2g(C_0) - 2 = (K_X + C_0) \cdot C_0 = K_X \cdot C_0 - n.$$

Так как $-K_X$ обилен, то $0 < -K_X \cdot C = 2 - n$ и $n < 2$.

Пусть теперь $\sigma\colon X \to X_{\min}$ – стягивание (-1)-кривых, где поверхность $X_{\min}$ минимальна. Предположим, что $X_{\min} \simeq \mathbb{F}_n$, $n \ge 2$. Тогда $C_0^2 \le -2$. Пусть $\tilde{C}_0 \subset X$ – собственный прообраз C_0. Тогда $(\tilde{C}_0)^2 \le C_0^2 \le -2$ и $\tilde{C}_0 \simeq \mathbb{P}^1$. По формуле для рода $-2 = 2g(\tilde{C}_0) - 2 = (K_X + \tilde{C}_0) \cdot \tilde{C}_0 < -2$. Противоречие. Следовательно, $X_{\min} \simeq \mathbb{P}^2$ или $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. $\square$

Последняя конструкция позволяет описать множество (-1)-кривых на поверхностях дель Пеццо. Любая (-1)-кривая принадлежит одному из следующих типов:

(i) $9-d$ исключительных дивизоров раздутия σ;

(ii) собственные прообразы прямых $L_{i,j}$, соединяющих пары точек P_i;

(iii) собственные прообразы коник, проходящих через пятерки точек P_i.

Для $K_X^2 = 2$ и 1 мы имеем еще три случая:

(iv) (только для $K_X^2 \le 2$) собственные прообразы кубик, проходящих через семь точек P_i, одна из которых – двойная;

(v) (только для $K_X^2 = 1$) собственные прообразы квартик, проходящих через все восемь точек P_i, три из которых – двойные;

(vi) (только для $K_X^2 = 1$) собственные прообразы квинтик, проходящих через все восемь точек P_i, шесть из которых – двойные;

(vii) (только для $K_X^2 = 1$) собственные прообразы секстик, проходящих через все восемь точек P_i, семь из которых – двойные и одна – торйная.

Например, на кубической поверхности лежит ровно $6 + \frac{6 \cdot 5}{2} + 6 = 27$ прямых, а на поверхности дель Пеццо степени 1 лежит ровно

$$8 + \frac{8 \cdot 7}{2} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} + 8 \cdot 7 + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} + \frac{8 \cdot 7}{2} + 8 = 240$$

(-1)-кривых.

6. Эллиптические пучки.

17 июня 2002

Поверхности дель Пеццо и системы корней

Напомним, что для любой рациональной поверхности X экспоненциальная последовательность и обращение в нуль $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ дают нам изоморфизм решеток $\operatorname{Pic}(X) \simeq H^2(X, \mathbb{Z})$. Опишем эту решетку в случае поверхностей дель Пеццо. По теореме Ходжа об индексе форма пересечения в вещественном пространстве $\operatorname{Pic}(X) \otimes \mathbb{R}$ имеет сигнатуру $(1, \rho - 1)$, где $\rho := \dim \operatorname{Pic}(X) \otimes \mathbb{R}$ (напомним, что $\rho = 10 - d$, где $d = K_X^2$). Обозначим через W ортогональное дополнение к каноническому классу K_X в $\operatorname{Pic}(X) \otimes \mathbb{R}$ и пусть $\mathcal{E} := W \cap \operatorname{Pic}(X)$ – решетка целых точек. Тогда $\langle D', D'' \rangle := -D' \cdot D''$ – эвклидово скалярное произведение на W. Пусть $E_1, \ldots, E_n$ – все (-1)-кривые на X.

Рассмотрим подмножество $R \subset \mathcal{E}$ всех векторов длины 2. Мы утверждаем, что R является *абстрактной системой корней*. По определению, мы должны проверить следующие три свойства.

(i) R – конечное множество, не содержащее 0 и порождающее пространство W. Для проверки этого свойства мы воспользуемся реализацией X как раздутия $\rho - 1 = 9 - d$ точек на $\mathbb{P}^2$ в общем положении: $\sigma \colon X \to \mathbb{P}^2$. Пусть $H^* := \sigma^* H$ – полный прообраз прямой на $\mathbb{P}^2$ и пусть $E_1, \ldots, E_{\rho-1}$ – исключительные дивизоры. Тогда элементы $E_1 - E_2$, $E_2 - E_3, \ldots$, $E_{\rho-2} - E_{\rho-1}$ и $H^* - E_1 - E_2 - E_3$ линейно независимы и принадлежат R.

(ii) Для любого элемента $v \in R$ соответствующее отражение $\tau_v \colon x \to x - (x, v)v$ переводит R в себя. Это также выполнено так как эти отражения переводят $\mathcal{E}$ в себя и сохраняют скалярное произведение.

(iii) $(x, y) \in \mathbb{Z}$ для всех $x, y \in R$. Это верно так как $R \subset \mathcal{E} \subset \operatorname{Pic}(X)$.

Из таблиц в книге Бурбаки мы получаем только следующие случаи

K_X^2	1	2	3	4	5	6	7	8
система корней	E_8	E_7	E_6	D_5	A_4	$A_1 \times A_2$	–	–
количество корней	240	126	72	40	20	8	–	–
количество (-1)-кривых	240	56	27	16	10	6	3	1

Чтобы получить последнюю строку в таблице, достаточно найти решения диофантовой системы уравнений $K_X \cdot x = x^2 = -1$ в $\operatorname{Pic}(X)$ и затем воспользоваться следующей леммой.

Лемма 6.1. *Пусть $x \in \operatorname{Pic}(X)$ – класс такой, что $x^2 = K_X \cdot x = -1$. Тогда существует единственная (-1)-кривая E такая, что $[E] = x$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{L} := \mathcal{O}_X(x)$. Так как дивизор $-K_X$ обилен и $-K_X \cdot (K_X - x) < 0$, то $|K_X - x| = \varnothing$. По теореме Римана-Роха имеем

$$h^0(X, \mathcal{L}) \geq \frac{1}{2}(x - K_X) \cdot x + \chi(\mathcal{O}_X) = 1.$$

Следовательно, существует эффективный дивизор E такой, что $[E] = x$. Так как дивизор $-K_X$ обилен и $-K_X \cdot E = 1$, то E – приведенная неприводимая кривая. По формуле для рода $-2 \leq 2p_a(E) - 2 = (K_X + E) \cdot E = -2$. Следовательно, $E \simeq \mathbb{P}^1$. Если E' – другая кривая с $[E'] = x$, то $E \cdot E' = x^2 < 0$. Противоречие. □

Возвращаясь к критерию рациональности Кастельнуово-Энриквеса мы отметим, что условие $p_g = q = 0$ не является достаточным для рациональности:

Пример 6.2. Пусть $Y \subset \mathbb{P}^3$ – гладкая поверхность с уравнением

$$x_0^5 + x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = 0$$

$\boldsymbol{\mu}_5$ – циклическая группа порядка 5, действующая в $\mathbb{P}^3$ и на Y по правилу

$$x_k \Longrightarrow \varepsilon^k x_i, \qquad \varepsilon = \exp(2\pi i/5), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Неподвижными точками являются только точки $(1:0:0:0)$, $(0:1:0:0)$, $(0:0:1:0)$, $(0:0:0:1)$. Они не лежат на Y, поэтому $X := Y/\boldsymbol{\mu}_5$ – неособая комплексная поверхность. Пусть $f\colon Y \to X$ – морфизм факторизации.

Мы утверждаем, что $q(X) = p_g(X) = 0$. Действительно, поверхность X проективна, поэтому $q(X) = \dim H^0(X, \Omega^1_X)$. Если s – голоморфная 1-форма на X, то f^*s – голоморфная 1-форма на Y. Однако $h^{1,0}(Y) = q(Y) = 0$. Последнее можно усмотреть, например, из точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-Y) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow 0$$

и обращений в нуль $H^1(\mathbb{P}_3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}) = H^2(\mathbb{P}_3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-5H)) = 0$. Далее, пусть ω – голоморфная 2-форма на X. Тогда $f^*\omega$ – голоморфная $\boldsymbol{\mu}_5$-инвариантная 2-форма на Y. В карте $x_0 \neq 0$ выберем координаты $y_i = x_i/x_0$, $i = 1, 2, 3$. Уравнение Y примет вид $g = 1 + y_1^5 + y_2^5 + y_3^5 = 0$, а форма $f^*\omega$ должна записываться в виде

$$f^*\omega = h\frac{dy_1 \wedge dy_2}{5y_3^4} = h\frac{dy_1 \wedge dy_3}{5y_2^4} = -h\frac{dy_2 \wedge dy_3}{5y_1^4}.$$

Если же мы рассмотрим карту $x_1 \neq 0$, то координатами являются $z_0 = x_0/x_1$, $z_2 = x_2/x_1$, $z_3 = x_3/x_1$. Форма $f^*\omega$ запишется в виде

$$f^*\omega = h(1/z_0, z_2/z_0, z_3/z_0)\frac{d(1/z_0) \wedge d(z_2/z_0)}{5(z_3/z_0)^4} = h(1/z_0, z_2/z_0, z_3/z_0)z_0\frac{dz_0 \wedge dz_2}{5z_3^4}.$$

Эта форма будет голоморфной только если $h(y_1, y_2, y_3)$ – многочлен степени ≤ 1. Очевидно, форма $f^*\omega$ не может быть инвариантной. Следовательно, $p_g(X) = 0$.

С другой стороны, квадратичный дифференциал $s := y_3^{-7}(dy_1 \wedge dy_2)^2$ голоморфен и инвариантен относительно $\boldsymbol{\mu}_5$. Тогда $s = f^*s'$, где s' – голоморфный квадратичный дифференциал на X. Поэтому $P_2(X) \neq 0$. Это показывает, что X не рационально, а значит, условия $p_g = q = 0$ не достаточны для характеризации рациональных поверхностей. Поверхность X является поверхностью общего типа и называется *поверхностью Годо*.

Эллиптические пучки

Напомним, что поверхностью общего типа называется поверхность максимальной кодаировой размерности. В этом случае линейная система $|nK_X|$ не имеет базисных точек и задает бирациональный морфизм $\varphi\colon X \to X' \subset \mathbb{P}^N$ на (возможно особую) поверхность. Здесь все еще остаются открытые вопросы относящиеся к *географии* (т.е. описанию возможных значений дискретных инвариантов, например, K_X^2 и $\chi_{\mathrm{top}}(X)$) и изучению многообразий модулей.

Поверхность общего типа не может иметь структуры расслоения на эллиптические кривые. В противоположность этому, многие поверхности кодаировой размерности ≤ 1 имеют такую структуру.

Пример 6.3. На любой поверхности кодаировой размерности $\kappa = 1$ линейная система $|nK_X|$ для некоторого $n > 0$ задает морфизм $\varphi X\colon B \subset \mathbb{P}^N$ – расслоение на эллиптические кривые. В этом случае структура такого расслоения единственна.

Мы уже приводили примеры рациональных поверхностей со структурой эллиптического расслоения.

Пример 6.4. Пусть X – (непроективная) поверхность с $a(X) = 1$. Тогда существует, так называемая, *алгебраическая редукция*: голоморфное отображение со связными слоями на алгебраическую кривую $f\colon X \to B$ такое, что

(i) $\mathcal{M}(X) = f^*\mathcal{M}(B)$;

(ii) общий слой f – гладкая эллиптическая кривая.

Действительно, непостоянная мероморфная функция φ задает рациональное отображение $X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$. Можно показать, что это отображение является голоморфным. Далее мы можем воспользоваться *разложением Штейна*: разложить морфизм $X \to \mathbb{P}^1$ в композицию $X \to B \to \mathbb{P}^1$, где $X \to B$ имеет связные слои, а $B \to \mathbb{P}^1$ – конечный морфизм. Остается только показать, что общий слой F расслоения $X \to B$ – эллиптическая кривая. По формуле для рода имеем

$$2g(F) - 2 = (\mathcal{K}_X + F) \cdot F = \mathcal{K}_X \cdot F.$$

Предположим, что $a := \mathcal{K}_X \cdot F \neq 0$. Тогда $L := \mathcal{K}_X + anF$ при $n \gg 0$ – линейное расслоение с $L^2 = \mathcal{K}_X^2 + 2a^2n > 0$. В этом случае (по критерию проективности) X – проективная поверхность. Противоречие.

Пример 6.5. Пусть X – поверхность кодаировой размерности $\kappa = 0$. Предположим, что существует морфизм $f\colon X \to B$ со связными слоями на кривую. Тогда f – эллиптическое расслоение. Действительно, как и выше, по формуле для рода для общего слоя F имеем

$$2g(F) - 2 = (\mathcal{K}_X + F) \cdot F = \mathcal{K}_X \cdot F.$$

Так как $\mathcal{K}_X$ – численно тривиальное расслоение (будет доказано ниже), то $g(F) = 0$. Таких структур в случае $\kappa = 0$ может быть несколько.

Отметим, однако, что далеко не всякая поверхность кодаировой размерности $\kappa = 0$ обладает морфизмом на кривую.

Классификация поверхностей с нулевой размерностью Кодаиры

Перейдем теперь к наиболее интересному случаю – случаю поверхностей с $\kappa = 0$.

Теорема 6.6. *Пусть X – минимальная поверхность с $\kappa(X) = 0$. Тогда X – одна из следующих:*

поверхность Энриквеса $2K_X \sim 0$, $b_1(X) = 0$, $a(X) = 2$, $\chi_{\mathrm{top}}(X) = 12$;

гиперэллиптическая поверхность $nK_X \sim 0$, $n = 2, 3, 4, 6$, $b_1(X) = 2$, $a(X) = 2$, $\chi_{\mathrm{top}}(X) = 0$;

поверхность Кодаиры I $K_X \sim 0$, $b_1(X) = 3$, $a(X) = 1$, $\chi_{\mathrm{top}}(X) = 0$;

поверхность Кодаиры II $nK_X \sim 0$, $n = 2, 3, 4, 6$, $b_1(X) = 1$, $a(X) = 1$, $\chi_{\mathrm{top}}(X) = 0$;

поверхность типа $K3$ $K_X \sim 0$, $b_1(X) = 0$, $a(X) = 0, 1, 2$, $\chi_{\mathrm{top}}(X) = 24$;

комплексный тор $K_X \sim 0$, $b_1(X) = 4$, $a(X) = 0, 1, 2$, $\chi_{\mathrm{top}}(X) = 0$;

7. Поверхности с $\kappa = 0$

20 июня 2002

Предложение 7.1. *Пусть X – минимальная поверхность кодаировой размерности $\kappa(X) = 0$. Тогда $nK_X \sim 0$ для некоторого n.*

Набросок доказательства. Мы имеем $|nK_X| \neq \varnothing$ для некоторого n. Пусть $D = \sum d_i D_i \in |nK_X|$. Если $D_i \cdot K_X < 0$, то $D \cdot D_i < 0$ и $D_i^2 < 0$. По формуле для рода $2p_a(D_i) - 2 = (K_X + D_i) \cdot D_i \leq -2$. Отсюда $K_X \cdot D_i = D_i^2 = -1$ и D_i – (-1)-кривая. Противоречие. Следовательно, $K_X \cdot D_i \geq 0$ для всех i. Более того, $K_X \cdot C \geq 0$ для любой кривой C. Так как $\kappa(X) = 0$, то из теоремы Римана-Роха имеем $D_i^2 \leq 0$ и $K_X^2 \leq 0$. Отсюда $0 \geq K_X \cdot D = \sum d_i K_X \cdot D_i \geq 0$. Поэтому $K_X \cdot D_i = K_X \cdot D = K_X^2 = 0$. Для каждого D_i имеются две возможности:

(i) $D_i^2 < 0$, тогда $2p_a(D_i) - 2 = D_i^2 = -2$, $D_i \simeq \mathbb{P}^1$;

(ii) $D_i^2 = 0$, тогда $2p_a(D_i) - 2 = D_i^2 = 0$, $p_a(D_i) = 1$ и D_i – связная компонента $\mathrm{Supp}(D)$.

Если $q(X) = 0$, то по теореме Римана-Роха $P_n(X) \geq \chi(\mathcal{O}_X) = 1 + p_g$ при $n \geq 2$. Если $p_g = 1$, то $P_2 \geq 2$. Противоречие. Пусть $p_g = 0$. Тогда $P_2 = P_3 = P_4 = 1$. Пусть $G_{(n)}$ – (единственный) дивизор в линейной системе $|nK_X| \neq \varnothing$, $n \geq 2$. Тогда $3G_{(2)} = 2G_{(3)} = G_{(6)}$. Положим $G = G_{(3)} - G_{(2)}$. Тогда $G \sim K_X$, т.е. $p_g > 0$. Противоречие.

Случай $q(X) > 0$ более сложен. Здесь используется отображение Альбанезе. □

Теперь рассмотрим подробно все случаи из теоремы 6.6.

Поверхности типа $K3$

Компактная комплексная поверхность X с $K_X = 0$ и $b_1(X) = 0$ называется *поверхностью типа* $K3$ (Kummer-Kähler-Kodaira). Из определения немедленно получаем

$$h^{1,0} = h^{0,1} = 0, \quad h^{2,0} = h^{0,2} = 1, \quad \chi(\mathcal{O}_X) = 2.$$

По формуле Нетера

$$\chi_{\mathrm{top}}(X) = 24, \quad b_2(X) = 22, \quad h^{1,1} = 20.$$

Мы утверждаем, что $H^2(X, \mathbb{Z})$ не имеет кручений. Действительно, по формулам универсальных коэффициентов

$$H^2(X, \mathbb{Z}) \simeq \text{Своб. часть } H_2(X, \mathbb{Z}) \oplus \text{Круч. } H_1(X, \mathbb{Z}).$$

Предположим, что имеется элемент n-кручения в $H_1(X, \mathbb{Z})$. Он определяет неразветвленное накрытие $\pi \colon Y \to X$ степени n. Тогда $\chi_{\mathrm{top}}(Y) = n\chi_{\mathrm{top}}(X) = 24n$. Так как $K_Y = \pi^* K_X = 0$, то $p_g(Y) = 1$. По формуле Нетера

$$12(2 - q(Y)) = \chi_{\mathrm{top}}(Y) = 24n \geq 48.$$

Противоречие. Следовательно, $H^2(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{22}$.

Последнее рассуждение доказывает большее: фундаментальная группа $\pi_1(X)$ поверхности типа $K3$ не имеет подгрупп конечного индекса. Из других соображений доказывается общий результат.

Предложение 7.2. *Любая поверхность типа* $K3$ *односвязна.*

Для примеров 7.4 односвязность $K3$ несложно проверить при помощи теоремы Лефшеца о гиперплоском сечении.

Экспоненциальная последовательность задает вложение

$$\mathrm{Pic}(X) \hookrightarrow H^2(X, \mathbb{Z}),$$

которое, однако, не является изоморфизмом: по теореме Лефшеца об $(1,1)$-классах

$$\mathrm{Pic}(X) = H^2(X, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(X) \subset H^2(X, \mathbb{C}) \ ,$$

поэтому $\mathrm{rk}\,\mathrm{Pic}(X) \leq 20$. Если C – неприводимая кривая, то $C^2 = (K_X + C) \cdot C = 2p_a(C) - 2$ четно. По линейности D^2 четно для всех дивизоров.

Используя более глубокие факты можно полностью описать решетку $H^2(X, \mathbb{Z})$.

Теорема 7.3 (теорема об индексе Тома-Хирцебруха $\neq$ теорема Ходжа об индексе). *Пусть* X *– компактная комплексная поверхность. Обозначим через* $b^+(X)$ *и* $b^-(X)$ *положительный и отрицательный индексы инерции формы пересечения на* $H^2(X, \mathbb{R})$ *(таким образом,* $b^+(X) + b^-(X) = b_2(X)$*). Тогда*

$$b^+(X) - b^-(X) = \frac{1}{3}(\omega_X^2 - 2\chi_{\mathrm{top}}(X)). \tag{6}$$

Отсюда сигнатура с нашем случае будет $(3, 19)$. Форма пересечения унимодулярна (двойственность Пуанкаре) и четна: x^2 четно для всех $x \in H^2(X, \mathbb{Z})$. Это устанавливается аналогично четности решетки $\mathrm{Pic}(X)$ с использованием топологического аналога формулы присоединения $x^2 \equiv x \cdot w_2 \mod 2$, w_2 – второй класс Штифеля-Уитни, а $w_2 \equiv c_1 \mod 2$. Из теории целочисленных решеток тогда немедленно получается, что

$$H^2(X, \mathbb{Z}) \simeq 3U_2 \oplus 2E_8,$$

где U_2 – решетка с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, а E_8 – отрицательно определенная решетка типа E_8. Согласно известной теореме из топологии односвязные четырехмерные многообразия с изоморфными решетками $H^2(X, \mathbb{Z})$ гомеоморфны. Из наших рассуждений следует теперь, что все поверхности $K3$ гомеоморфны. Можно также показать, что все $K3$ диффеоморфны, однако, это – более глубокий результат.

Пример 7.4. Пусть $X = X_4 \subset \mathbb{P}^3$ – поверхность степени 4. Тогда по формуле присоединения $K_X = 0$. Из точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0.$$

Немедленно получаем, что $q(X) = 0$. По теории Ходжа $b_1(X) = h^{1,0} + h^{0,1} = 2q(X) = 0$. Следовательно, X – $K3$ поверхность. Аналогично, полные пересечения $X_{2\cdot 3} \subset \mathbb{P}^4$ и $X_{2\cdot 2\cdot 2} \subset \mathbb{P}^5$ также являются $K3$ поверхностями. Формула присоединения показывает также, что не существует других полных пересечений являющихся $K3$ поверхностями.

Пример 7.5. Предположим, что поверхность X представляется в виде двулистного накрытия $f\colon X \to \mathbb{P}^2$ с дивизором ветвления $B \subset \mathbb{P}^2$ степени 6. Тогда

$$K_X = f^* K_{\mathbb{P}^2} + R = f^* \left(K_{\mathbb{P}^2} + \frac{1}{2} B \right) = 0.$$

Далее

$$\chi_{\mathrm{top}}(X) = 2\chi_{\mathrm{top}}(\mathbb{P}^2 \setminus B) + \chi_{\mathrm{top}}(B) = 6 - \chi_{\mathrm{top}}(B) = 6 - 2 + 2g(B) = 4 + (6-1)(6-2) = 24.$$

По формуле Нетера

$$12\chi(\mathcal{O}_X) = K_X^2 + \chi_{\mathrm{top}}(X) = 24, \quad \chi(\mathcal{O}_X) = 1 - q(X) + p_g(X) = 2, \quad q(X) = 0.$$

Следовательно, X – $K3$ поверхность. Аналогично, мы можем рассмотреть двулистное накрытие $f\colon X \to \mathbb{F}_n$ с ветвлением в (гладком) дивизоре $B \in | - 2K_{\mathbb{F}_n}|$. Как и выше получаем $K_X = 0$, $g(B) = 9$, $\chi_{\mathrm{top}}(X) = 24$, $q(X) = 0$, т.е. X – $K3$ поверхность. Отметим, что на линейчатой поверхности $\mathbb{F}_n$ имеется равенство $C_0 \cdot B = -2C_0 \cdot K_X = -2(2g(C_0) - 2 - C_0^2) = 4 - 2n$. Следовательно, сечение C_0 – компонента B при $n > 2$. Тогда $(B - C_0) \cdot C_0 = 4 - n$. При $n > 4$ кривая C_0 является кратной компонентой B, а при $n = 3$ дивизор B имеет самопересечения. Это противоречит неособости X. Следовательно, $n \leq 2$ или $n = 4$.

Пример 7.6 (куммерова поверхность). Пусть Y – комплексный тор и пусть $\tau\colon Y \to Y$ – инволюция $\tau(y) = -y$. Рассмотрим фактор $V := Y/\tau$ и пусть $\pi\colon Y \to V$ – морфизм факторизации. Поверхность V является особой: инволюция τ имеет ровно 16 неподвижных точек $P_1, \dots, P_{16} \in Y$ и их образы $Q_i := \pi(P_i)$ являются особыми точками V. Чтобы изучить характер этих особенностей введем локальные координаты z_1, z_2, согласованные со структурой комплексного тора, на Y вблизи какой-либо точки, например, $P_1 = 0$ (все точки P_i равноправны). Действие τ имеет вид $z_1 \to -z_1$, $z_2 \to -z_2$. Голоморфными функциями в окрестности Q_i на V будут инвариантные голоморфные функции на X. Это кольцо порождается элементами $v_1 = z_1^2$, $v_2 = z_2^2$, $v_3 = z_1 z_2$. Между ними имеется единственное соотношение $v_1 v_2 = v_3^2$. Это показывает, что точки $Q_i \in V$ – дювалевские типа

A_1 (т.е. аналитически эквивалентны точке, заданной уравнением $v_1v_2 = v_3^2$). Локальная проверка показывает, что такие точки разрешаются одним раздутием (т.е. становятся неособыми после первого раздутия). Причем исключительные дивизоры неприводимы и являются (-2)-кривыми. Пусть $\delta\colon X \to V$ – это раздутие. Утверждается, что X – $K3$ поверхность. Чтобы показать это, мы дадим другую конструкцию поверхности X. на поверхности Y и рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y} & \xrightarrow{\varphi} & X \\ {\scriptstyle\sigma}\big\downarrow & & {\scriptstyle\delta}\big\downarrow \\ Y & \xrightarrow{\pi} & V \end{array}$$

где $\sigma\colon \tilde{Y} \to Y$ – раздутие точек $P_1, \dots, P_{16}$, а $\varphi\colon Y \to X$ – факторизация по инволюции τ (так как мы раздували инвариантные точки, то действие τ поднимается на Y). Локально, вблизи каждого исключительного дивизора $\tilde{Y}$ можно задать уравнением $z_1w_2 = z_2w_1$ в $Y \times \mathbb{P}^1$. Отсюда видно, что действие τ на исключительных дивизорах E_i тривиально. Следовательно, в окрестности каждой точки $Q \in E_i$ мы можем выбрать локальные координаты так, что действие τ будет иметь вид $x_1 \to x_1$, $x_2 \to -x_2$. В этом случае кольцо инвариантов порождается двумя элементами x_1 и x_2^2, которые и являются локальными координатами на факторе. Следовательно, $X = \tilde{Y}/\tau$ – неособая поверхность.

Мы утверждаем, что $K_X = 0$. Действительно, на торе Y существует τ-инвариантная голоморфная 2-форма без нулей и полюсов, которая задает голоморфную 2-форму на $V \setminus \mathrm{Sing}(V)$ и на $X \setminus \sum \varphi(E_i)$. По принципу Хартогса эта форма продолжается на X и снова не имеет ни нулей, ни полюсов. Следовательно, $K_X = 0$. В частности, поверхность X минимальна.

С другой стороны, предполагая, что существует голоморфная 1-форма на X мы получим τ-инвариантную голоморфную 1-форму на $Y \setminus \{P_1, \dots, P_{16}\}$. Она продолжается на всю поверхность Y, что невозможно.

Другой подход:

$$K_{\tilde{Y}} = \sigma^* K_Y + \sum E_i = \varphi^* K_X + \sum E_i.$$

Отсюда $K_X = 0$. Далее

$$\chi_{\mathrm{top}}(X) = \frac{1}{2}\left(\chi_{\mathrm{top}}\left(\tilde{Y} \setminus \sum E_i\right)\right) + \sum \chi_{\mathrm{top}}(E_i) = \frac{1}{2}\chi_{\mathrm{top}}\left(Y - \sum P_i\right) + 32 = 24.$$

Следовательно, X – $K3$ поверхность. Она называется *куммеровой поверхностью* Отметим, что мероморфные функции на X – в точности τ-инвариантные что мероморфные функции на Y. Поэтому несложно построить куммеровы поверхности с $a(X) = 0, 1, 2$, в частности, непроективные.

Пример 7.7. Пусть $G := \mathrm{Gr}(k, n)$ – грассманиан, параметризующий аффинные k-мерные подпространства в $\mathbb{C}^n$. Тогда $-K_G = nH$, где H – гиперплоское сечение при плюккеровом вложении. Несложно показать (аналогично нашим вычислениям для проективного пространства), что сечение $X = G \cap \mathbb{P}^6 \cap Q$ плюккерова вложения $\mathrm{Gr}(2,5) \subset \mathbb{P}(\wedge^2\mathbb{C}^5) = \mathbb{P}^9$ подпространством коразмерности 3 и квадрикой является $K3$ поверхностью. Аналогично, сечение $X = G \cap \mathbb{P}^6 \cap Q$ плюккерова вложения $\mathrm{Gr}(2,6) \subset \mathbb{P}(\wedge^2\mathbb{C}^6) = \mathbb{P}^{14}$ подпространством коразмерности 6 является $K3$ поверхностью.

Предложение 7.8. *Пусть X – поверхность $K3$. Тогда*

$$H^0(X, T_X) = H^2(X, T_X) = 0, \qquad \dim H^1(X, T_X) = 20.$$

В частности, $K3$ поверхности параметризуются 20-мерным комплексным многообразием.

Доказательство. Так как $\mathcal{O}_X \simeq \wedge^2\Omega_X$, то мы имеем канонический изоморфизм $T_X \simeq \Omega^1_X$. $\square$

Поскольку все $K3$ поверхности гомеоморфны, то мы можем зафиксировать топологическое многообразие X и рассматривать нашу конструкцию как деформацию комплексной структуры на X.

Отметим, что квартики в $\mathbb{P}^3$ параметризуются многообразием размерности

$$\frac{(4+3)!}{4!\cdot 3!} - 1 - (4^2 - 1) = 19.$$

Аналогичные вычисления могут быть проделаны во всех примерах проективных $K3$ поверхностей: поляризованные поверхности $K3$ параметризуются 19-мерным подсемейством.

Предложение 7.9. *Пусть C – неприводимая кривая арифметического рода $g = p_a(C)$ на проективной $K3$ поверхности X. Тогда*

$$2g - 2 = C^2, \qquad \dim|C| \geq g.$$

Более того,

(i) если $C^2 < 0$, то C – (-2)-кривая, т.е. $C \simeq \mathbb{P}^1$ и $C^2 = -2$;

(ii) если $C^2 = 0$, то линейная система $|C|$ не имеет базисных точек и задает структуру эллиптического пучка $X \to \mathbb{P}^1$;

(iii) если $C^2 > 0$, то $\dim|C| = g$ и линейная система $|C|$ не имеет базисных точек и задает морфизм $\varphi\colon X \to \mathbb{P}^g$. Образ $\varphi(X)$ является поверхностью. Если кривая $E \subset X$ отображается в точку, то E – (-2)-кривая (может стягиваться только конечное число таких кривых). Возможны два подслучая:

а) Морфизм $X \to \varphi(X)$ бирационален и $\deg\varphi(X) = 2g-2$. Тогда общее гиперплоское сечение $\varphi(X)\cap\mathbb{P}^{g-1}$ является канонической кривой рода $g \geq 3$. Поверхность $\varphi(X)$ может иметь лишь “очень хорошие” (дювалевские) особенности.

б) Морфизм $X \to \varphi(X)$ в общей точке имеет степень 2 и $\deg\varphi(X) = g - 1$. Тогда общая кривая из линейной системы C – гиперэллиптическая. В факторизации Штейна $X \to X_0 \to \varphi(X)$ поверхность X_0 также неособа или имеет дювалевские особенности, а $\varphi(X) = \mathbb{P}^2$, $\mathbb{F}_n$ или $\varphi(X)$ – конус над рациональной нормальной кривой $\Gamma_n \subset \mathbb{P}^n$. В последних двух случаях $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (ср. пример 7.5).

Пример 7.10. Пусть $X = X_4 \subset \mathbb{P}^3$ – поверхность степени 4, содержащая прямую L. Рассмотрим пучок плоскостей Π_t, $t \in \mathbb{P}^1$, проходящих через L. Для каждой Π_t имеем $\Pi_t \cap X = L + C_t$, где C_t – плоская кубическая кривая. Кривые C_t задают тогда эллиптический пучок на $K3$ поверхности X, а прямая L является (-2)-кривой. Отметим, однако, что для общей квартики имеем $\mathrm{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z}\cdot H$. Следовательно, она не имеет структуры расслоения.

Поверхности Энриквеса

Компактная комплексная поверхность X с $2K_X = 0$, $K_X \not\sim 0$ и $q(X) = 0$ называется *поверхностью Энриквеса*.

Эти условия дают нам $K_X^2 = 0$, $p_g = 0$, $\chi(\mathcal{O}_X) = 0$ и по формуле Нетера $\chi_{\mathrm{top}}(X) = 12$. Следовательно, $b_1(X) = 2q(X) = 0$ и $b_2(X) = 10$. Далее, из экспоненциальной последовательности имеем $\mathrm{Pic}(X) \simeq H^2(X, \mathbb{Z})$. По формулам универсальных коэффициентов

$$H^2(X, \mathbb{Z}) \simeq \text{Своб. часть } H_2(X, \mathbb{Z}) \oplus \text{Круч. } H_1(X, \mathbb{Z}).$$

Следовательно, элемент K_X задает элемент 2-кручения в $H_1(X, \mathbb{Z})$ и, следовательно, неразветвленное двулистное накрытие $\pi\colon Y \to X$. Для Y имеем $K_Y = 0$ и $\chi_{\mathrm{top}}(Y) = 2\chi_{\mathrm{top}}(X) = 24$. Следовательно, Y – $K3$ поверхность.

Предложение 7.11. *Каждая поверхность Энриквеса является фактором некоторой $K3$ поверхности по инволюции, действующей без неподвижных точек. Обратно, каждый такой фактор является поверхностью Энриквеса.*

Следствие 7.12. *Пусть X – поверхность Энрикведа. Тогда*

(i) $\pi_1(X) \simeq \mathbb{Z}_2$*;*

(ii) универсальная накрывающая X – поверхность типа $K3$;

(iii) $\operatorname{Pic}(X) \simeq H^2(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{10} \oplus \mathbb{Z}_2$.

Как и в случае $K3$ доказывается, что решетка $H^2(X, \mathbb{Z})/\text{Круч.}$ изоморфна $E_8 \oplus U$.

Пример 7.13. Рассмотрим следующее полное пересечение $Y = Y_{2\cdot 2\cdot 2} \subset \mathbb{P}^5$:

$$\begin{cases} f_1(x_0, x_1, x_2) + g_1(x_3, x_4, x_5) = 0 \\ f_2(x_0, x_1, x_2) + g_2(x_3, x_4, x_5) = 0 \\ f_3(x_0, x_1, x_2) + g_3(x_3, x_4, x_5) = 0 \end{cases}$$

Для общего выбора квадратичных форм f_i, g_i Y является неособой поверхностью типа $K3$. Зададим действие инволюции

$$\tau \colon (x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5) \longrightarrow (-x_0 : -x_1 : -x_2 : x_3 : x_4 : x_5).$$

Если мы потребуем, чтобы системы уравнений $f_1 = f_2 = f_3 = 0$ и $g_1 = g_2 = g_3 = 0$ не имели общих точек, то τ не будет иметь неподвижных точек на Y и $X := Y/\tau$ – поверхность Энриквеса.

Предложение 7.14. *Пусть X – поверхность Энриквеса. Тогда*

$$H^0(X, T_X) = H^2(X, T_X) = 0, \qquad \dim H^1(X, T_X) = 10.$$

В частности, поверхности Энриквеса параметризуются 10-мерным комплексным многообразием.

Доказательство. Пусть $\pi \colon Y \to X$ – фактор фактором $K3$ поверхности по инволюции. Так как Y не имеет нетривиальных голоморфных векторных полей, то же самое верно для X: $H^0(X, T_X) = 0$. Далее $\mathcal{K}_X \otimes T_X^\vee = \mathcal{K}_X^\vee \otimes \Omega_X^1 = T_X$. Отсюда по двойственности Серра $\dim H^2(X, T_X) = \dim H^0(X, T_X) = 0$. Последнее равенство получается из теоремы Римана-Роха. ☐

Несложно проверить последнее утверждение на примере 7.13: таких поверхностей существует в точности 10-мерное семейство. Более того, известно, что <u>любая</u> поверхность Энриквеса может быть получена конструкцией из примера 7.13.

Последнее вычисление является аргументом в пользу следующего

Предложение 7.15. *Любая поверхность Энриквеса проективна.*

Доказательство. Так как $\operatorname{Pic}(X) \simeq H^2(X, \mathbb{Z})$, то по критерию проективности для поверхностей достаточно найти элемент $x \in H^2(X, \mathbb{Z})$ такой, что $x^2 > 0$. Последнее следует из общей теоремы об индексе Тома-Хирцебруха 7.3. ☐

Рассмотрим другую реализацию поверхностей Энриквеса.

Пример 7.16. Пусть $Q = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ и пусть $B \in |-2K_Q|$ – гладкая кривая бистепени $(4, 4)$. Как и в примере 7.5 рассмотрим двулистное накрытие $f \colon Y \to Q$ с дивизором ветвления B. Тогда Y – $K3$ поверхность. Рассмотрим инволюцию τ на Q действующую по правилу

$$\tau \colon (x, y) \longrightarrow (-x, -y),$$

где x, y – неоднородные координаты на каждом $\mathbb{P}^1$. Если кривая B не проходит через 4 неподвижные точки, то инволюция τ поднимается на Y и не имеет там неподвижных точек. Фактор $X := Y/\tau$ является поверхностью Энриквеса.

Прообразы пучков прямых $f^1(L_x)$ и $f^{-1}(L'_y)$ являются пучками эллиптических кривых на Y (по формуле Гурвица так как морфизмы $f^1(L_x) \to L_x$ разветвлены в 4 точках пересечения $L_x \cap B$). Оба пучка спускаются до эллиптических пучков на X.

Посчитаем количество параметров в последнем примере. Кривая B задается элементом

$$H^0(Q, \mathcal{O}_Q(4,4)) \simeq H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4)) \otimes H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4)) = (S^4\mathbb{C}^2) \otimes (S^4\mathbb{C}^2) \simeq \mathbb{C}^{25}.$$

По модулю скалярных умножений и проективных преобразований $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ имеется $25 - 4 \cdot 4 + 1 = 10$-мерное семейство таких кривых, а, следовательно, и поверхностей X. Это подтверждает следующий факт: общая поверхность Энриквеса может быть получена при помощи конструкции из примера 7.16.

Предложение 7.17. *Любая поверхность Энриквеса имеет структуру эллиптического расслоения над* $\mathbb{P}^1$. *Общая поверхность Энриквеса имеет ровно две таких структуры.*

При вырождении конструкции из примера 7.16 поверхность $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ деформируется в квадратичный конус, а эллиптические пучки "сливаются".

Биэллиптические поверхности

Пусть E и C – эллиптические кривые и G – конечная подгруппа сдвигов на E, действующая на C не только сдвигами. По определению *биэллиптическая поверхность* – это фактор $(C \times E)/G$. Положим $X = (C \times E)/G$ и $B = E/G$. Тогда X имеет структуру расслоения над B на эллиптические кривые изоморфные C. Имеется полный список возможностей для $C = \mathbb{C}/\Lambda$ и G:

	Λ	G	действие G на C
1	любая	$\mathbb{Z}_2$	$x \to -x$
2	любая	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$x \to -x$, $x \to x + a_0$, $2a_0 = 0$
3	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\omega$	$\mathbb{Z}_3$	$x \to \omega x$
4	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\omega$	$\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$	$x \to \omega x$, $x \to x + a_0$, $\omega a_0 = a_0$
5	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\sqrt{-1}$	$\mathbb{Z}_4$	$x \to \sqrt{-1}x$
6	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\sqrt{-1}$	$\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$	$x \to \sqrt{-1}x$, $x \to x + a_0$, $\sqrt{-1}a_0 = a_0$
7	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\omega$	$\mathbb{Z}_6$	$x \to -\omega x$

Для таких поверхностей мы имеем $p_g(X) = 0$, $q(X) = 0$, $h^{1,1} = 2$ и $nK_X \sim 0$ для $n \in \{2, 3, 4, 6\}$. Такая поверхность обязательно проективна.

Общая теория локально тривиальных эллиптических поверхностей

Рассмотрим локально тривиальное расслоение $f\colon X \to B$ над базой-кривой B с типичным слоем – эллиптической кривой C. Пусть $B = \cup U_\alpha$ – открытое покрытие такое, что $f^{-1}U_\alpha \simeq U_\alpha \times C$. Тогда на $U_\alpha \cap U_\beta$ возникают "автоморфизмы перехода" – автоморфизмы $g_{\alpha\beta}\colon C \to C$, голоморфно зависящие от точки $b \in U_{\alpha\beta}$ и удовлетворяющие условиям

$$g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\alpha} = 1, \qquad g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} \circ g_{\gamma\alpha} = 1. \tag{7}$$

Обозначим через $\mathcal{A}_B$ (соответственно $\mathcal{C}_B$) пучок голоморфных отображений B в $\mathrm{Aut}(C)$ (соответственно в $C \subset \mathrm{Aut}(C)$). Таким образом, расслоение f, покрытие $B = \cup U_\alpha$ и тривиализации $\varphi_\alpha\colon f^{-1}U_\alpha \to U_\alpha \times C$ задают набор элементов $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{A}_B(U_\alpha \cap U_\beta)$. Обратно, по набору функций $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{A}_B(U_\alpha \cap U_\beta)$ при помощи склеек строится локально тривиальное расслоение над B с типичным слоем – C.

Если мы выберем другие тривиализации φ'_α, то $\varphi'_\alpha = h_\alpha \varphi_\alpha$ для $h_\alpha \in \mathcal{A}_B(U_\alpha)$. Тогда новые функции перехода связаны со старыми соотношением

$$g'_{\alpha\beta} = h_\alpha g_{\alpha\beta} h_\beta^{-1}. \tag{8}$$

Соотношения (7) и (8) показывают, что обратимые пучки задаются элементом группы когомологий Чеха $H^1(X, \mathcal{A}_B)$. Отметим, однако, что $\mathcal{A}_B$ – пучок некоммутативных групп, поэтому в когомологиях $H^1(X, \mathcal{A}_B)$ нельзя ввести естественную структуру группы. Тем не менее, в $H^1(X, \mathcal{A}_B)$ существует *нейтральный элемент* – образ тривиальных коциклов. Это дает возможность рассматривать точные последовательности.

Напомним, что имеет место точная последовательность

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow \mathrm{Aut}(C) \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 0,$$

где эллиптическая кривая действует на себе сдвигами, а $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_n$ – циклическая группа порядка

$$\begin{array}{ll} n = 4 & \text{если } C \simeq \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\sqrt{-1}) \\ n = 6 & \text{если } C \simeq \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \omega\mathbb{Z}),\ \omega^6 = 1 \\ n = 2 & \text{в остальных случаях.} \end{array}$$

Отсюда получаем

$$H^1(B, \mathcal{C}_B) \longrightarrow H^1(B, \mathcal{A}_B) \longrightarrow H^1(B, \Gamma).$$

Для вычисления $H^1(B, \mathcal{C}_B)$ можно пользоваться точной последовательностью

$$0 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow C \longrightarrow 0, \quad \Lambda \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Откуда

$$H^1(B, \Lambda) \longrightarrow H^1(B, \mathcal{O}_B) \longrightarrow H^1(B, \mathcal{C}_B) \xrightarrow{c} H^2(B, \Lambda) \longrightarrow 0,$$

где $H^2(B, \Lambda) \simeq \Lambda$.

Пример 7.18. Пусть $B = \mathbb{P}^1$. Тогда $H^1(B, \mathbb{Z}_n) = 0$. Следовательно, соответствующий коцикл является образом коцикла $\xi \in H^1(B, \mathcal{C}_B)$. Если расслоение $f \colon X \to B$ нетривиально, то X – поверхность Хопфа (см. пример 5.13).

Пример 7.19. Пусть $X = \mathbb{C}^2/\Lambda$ – двумерный комплексный тор и пусть $C \subset X$ – эллиптическая кривая. Групповой закон на X задает тогда семейство непересекающихся кривых C_t и расслоение $f \colon X \to B = X/C$. Ясно, что все функции перехода являются сдвигами. Поэтому f – главное расслоение (задается элементом $\xi \in H^1(B, \mathcal{C}_B)$). Расслоение топологически тривиально. Следовательно, $c(\xi) = 0$.

Пример 7.20. Биэллиптические поверхности имеют структуру локально тривиального расслоения на эллиптическое кривые. Соответствующий коцикл $\xi \in H^1(B, \mathcal{A}_B)$ не лежит в образе $H^1(B, \mathcal{C}_B)$.

Замечание 7.21. Введенный выше формализм позволяет описать и все локально тривиальные $\mathbb{P}^1$-расслоения над кривой B (= линейчатые поверхности). Действительно, такие расслоения классифицируются множеством $\mathcal{PGL}_2$. Точная последовательность групп

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow GL_2 \longrightarrow PGL_2 \longrightarrow 0$$

индуцирует точную последовательность пучков

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_B^* \longrightarrow \mathcal{GL}_2 \longrightarrow \mathcal{PGL}_2 \longrightarrow 0.$$

и точную последовательность когомологий

$$H^1(B, \mathcal{O}_B^*) \longrightarrow H^1(B, \mathcal{GL}_2) \longrightarrow H^1(B, \mathcal{PGL}_2) \longrightarrow H^2(B, \mathcal{O}_B^*).$$

Так как B – кривая, то из экспоненциальной последовательности немедленно получается, что

$$H^2(B, \mathcal{O}_B^*) = 0\ ,$$

т.е. отображение $H^1(B, \mathcal{GL}_2) \to H^1(B, \mathcal{PGL}_2)$ сюръективно. Множество $H^1(B, \mathcal{GL}_2)$ классифицирует векторные расслоения ранга 2 на B. Таким образом, каждое $\mathbb{P}^1$-расслоение на B является проективизацией некоторого векторные расслоения ранга 2.

Поверхности Кодаиры

Рассмотрим локально тривиальное эллиптическое расслоение $f\colon X \to B$, заданное элементом $\xi \in H^1(B, \mathcal{C}_B)$ с $c(\xi) \neq 0$. Для поверхности X имеем $\chi_{\mathrm{top}}(X) = \chi_{\mathrm{top}}(B)\chi_{\mathrm{top}}(C) = 0$. Отсюда $0 = 2 - 2b_1(X) + b_2(X)$. Далее

$$b_1(X) = 3, \qquad b_2(X) = 4, \quad q(X) = 2, \quad K_X = 0.$$

Такие поверхности называются *поверхностями Кодаиры типа I*.

Иногда поверхность Кодаиры имеет конечную, свободно действующую группу автоморфизмов. Факторы по такой группе называются *поверхностями Кодаиры типа II*. Для них $nK_X \sim 0$ для некоторого $n = 2, 3, 4, 6$,

$$b_1(X) = 1, \quad b_2(X) = 0, \quad a(X) = 1, \quad q(X) = 1, \quad p_g(X) = 0.$$

Все такие поверхности непроективны.

Комплексные торы

Комплексные торы уже обсуждались. Они являются факторами $V = \mathbb{C}^n$ по полной решетке $\Lambda \subset V$, $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^{2n}$ (мы рассматриваем случай произвольной размерности). Сдвиг по группе определяет изоморфизм пучков

$$\Omega^p_X \simeq \wedge^p V^\vee,$$

где $V^\vee = T^\vee_X$ – тривиальное кокасательное расслоение. Следовательно,

$$H^0(X, \Omega^p_X) \simeq \wedge^p V^\vee,$$

иначе говоря, глобальные p-формы на X – в точности инвариантные p-формы. Отсюда также получаем

$$H^q(X, \Omega^p_X) \simeq H^q(X, \mathcal{O}_X) \otimes \wedge^p V^\vee \simeq \wedge^q V \otimes \wedge^p \overline{V}.$$

Заметим, что любой комплексный тор кэлеров: в качестве кэлеровой формы мы можем взять инвариантную $(1,1)$-форму

$$\omega = \frac{i}{2} \sum_j dz_j \wedge d\overline{z_j} \in V^\vee \otimes \overline{V^\vee}.$$

Условия Римана

Для того, чтобы X было проективным алгебраическим многообразием необходимо и достаточно, чтобы на X существовала замкнутая положительная $(1,1)$-форма, представляющая рациональный класс когомологий. В нашем частном случае эта форма может быть выбрана инвариантной. Отсюда несложно выписать это условие для комплексных торов.

Пусть $z_1, \ldots, z_n$ – комплексные координаты в V и пусть $x_1, \ldots, x_{2n}$ – вещественные координаты, соответствующие решетке Λ. Запишем

$$x_k = \sum_j \pi_{k,j} z_j + \sum_j \overline{\pi_{k,j} z_j}.$$

и введем $2n \times n$-матрицу $\Pi := (\pi_{k,j})$. Таким образом, $\tilde{\Pi} := \begin{pmatrix} \Pi \\ \overline{\Pi} \end{pmatrix}$ – матрица перехода от базиса z_j, $\overline{z_j}$ к базису x_k. В этих обозначениях комплексный тор является проективным многообразием тогда и только тогда, когда существует целочисленная кососимметрическая матрица Q такая, что

$$\Pi^t Q \Pi = 0, \qquad -i\Pi^t Q \overline{\Pi} > 0.$$